

Multibody Dynamics

吉田勝俊

2007年1月16日

目次

1	空想と論理	1-1
2	筆算用のベクトル	2-1
3	ベクトルの成分表示	3-1
4	直線座標系	4-1
5	外積	5-1
6	回転変換と行列表示	6-1
7	剛体の運動学	7-1
8	ロボット機構学	8-1
9	時間微分と慣性枠	9-1
10	運動量と重心速度	10-1
11	角運動量と角速度	11-1
12	剛体の運動法則	12-1
	以降, 執筆中 . . .	

Multibody Dynamics

(第1回 空想と論理)

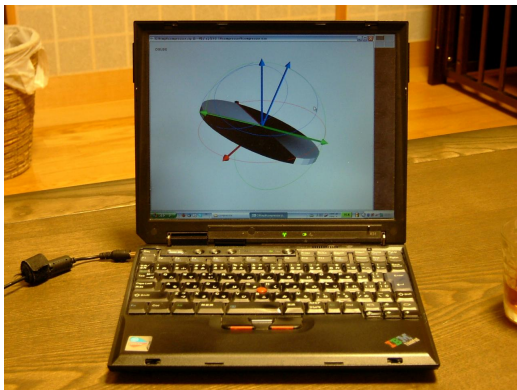
吉田勝俊

2006年10月6日

空想を客観的に行うための常套手段を導入する。

§1 仮想現実と文字操作

回転する円盤の力学シミュレーションである。



この仮想円盤の実体はソフトウェアであり、ソフトウェアは文字情報からなる。詩歌や小説の例をひくまでもなく、文字情報の操作においては、いかなる空想も可能である。ディスプレイ上をまことしやかに運動する円盤ではあるが、それが現実の反映である保証はどこにもない。

意外かもしれないが、数式とて例外ではない。数式もまた文字情報であるから、それ相応の工夫がないかぎり、私的な妄想に陥る危険性は十二分にある。

§2 公理的方法

客観的な空想のために、次のような手順を導入する。

1. 何も書いてない白紙を用意する。
2. そこに少数の基本ルールを書きこむ。
3. 以降、この白紙には、基本ルールと整合する主張しか書き足さない。

このような方法を、公理的方法という。

- 最初に定める基本ルールを定義、公理などと呼び、印を付けて表わす。
- 基本ルールと整合した2次ルールを、定理、公式、命題、補題などと呼び、印で表わす。

整合性のチェックには、数理論理学を使う。

§3 数理論理学

力学現象と矛盾しない、論理の操作方法を導入する。

定義 1.1 (真理値): 真偽の定まった文章を命題という。

- 命題 P が真であることを $P = 1$ と表わす。
- 命題 P が偽であることを $P = 0$ と表わす。

このような真偽を表わす値 1, 0 を真理値という。

定義 1.2 (論理記号): 命題 P, Q から別の命題を作るルールを4つ定める。

(1) 論理和 (または) (2) 論理積 (かつ) (3) 否定 (でない)

P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \wedge Q$	P	$\neg P$
1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0		
0	0	0	0	0	0		

(4) 条件命題 (ならば)

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

このような、真理値を並べた表を、真理表という。

(4) の定義に違和感を憶えるひとが多いと思う。(4) に対応する日常の論理を挙げておく。例えば、次の揭示は本当か嘘か?

雨の日 \Rightarrow 休講とする

雨の日 ($P = 1$) に、休講したら ($Q = 1$) 揭示は本当 ($P \Rightarrow Q = 1$) だが、授業したら ($Q = 0$) 揭示は嘘 ($P \Rightarrow Q = 0$) である。ところが、雨以外の日 ($P = 0$) に休講しても ($Q = 1$)、授業しても ($Q = 0$)、揭示に嘘はない ($P \Rightarrow Q = 1$)。この状況は (1)~(3) では表せないから、それ用の (4) が用意される。

いや違う、 $P \Rightarrow Q$ の論理は 1, 0, 0, 1 であるべきだとさらに粘りたい諸君は、次の記号を定義して使うべし。

定義 1.3: $P \Leftrightarrow Q \stackrel{\text{定義}}{=} (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q)$ と定める。 $P \Leftrightarrow Q$ を双条件命題という。

何もなかった世界に, 3 つの (定義 1.1, 1.2, 1.3) が設置された. この世界に整合する最初の「 \perp 」を導いてみる.

定理 1.1 (双条件命題): 双条件命題 $P \Leftrightarrow Q$ について, 次の真理表が成立する.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

例 1: 定義 1.1, 1.2, 1.3 を前提に定理を示せ.

定義 1.4 (同値記号): 真理値または真理表が一致する命題を, 同値であるといい, $P \Leftrightarrow Q$ または $P \equiv Q$ と書く.

定理 1.2 (論理の算法): その他いろいろ, 同様に示せる.

- (a) $P \vee P \equiv P, P \wedge P \equiv P.$ (累同則)
- (b) $P \vee Q \equiv Q \vee P, P \wedge Q \equiv Q \wedge P.$ (交換則)
- (c) $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R,$
 $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R.$ (結合則)
- (d) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$
 $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$ (分配則)
- (e) $\neg\neg P \equiv P.$ (二重否定)
- (f) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q, \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q.$ (ド・モルガン)
- (g) $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P).$ (対偶)

例 2: 定義 1.1, 1.2, 1.4 を前提に (d) を示せ.

Report 1: 定義 1.1, 1.2, 1.4 を前提に (g) を示せ.

§4 限定記号

命題 P の真理値が変数 x に依存するとき, P を命題関数と呼び $P(x)$ などと書く. 例えば,

- $P(x) :=$ “ x は光合成する” について, P (焼き鳥) は偽, P (生レタス) は真.

このように, 命題関数 $P(x)$ の真理値を確定させるには, 変数 x に具体的な定数を代入すればよいが, もう 1 つの方法として, 限定記号を用いる方法がある.

定義 1.5 (限定記号): $P(x)$ を命題関数とする.

$\forall x : P(x) \stackrel{\text{定義}}{\iff}$ 全ての (任意の) x について $P(x)$ は真である.

$\exists x : P(x) \stackrel{\text{定義}}{\iff}$ $P(x)$ を真にするような x が (少なくとも 1 つ) 存在する (選べる).

記号 \forall を全称記号, \exists を存在記号という. これらを総称して限定記号という.

限定記号付きの命題の否定を作るには, それぞれ,

$$\begin{cases} \neg(\forall x : P(x)) & \equiv \exists x : \neg P(x) \\ \neg(\exists x : P(x)) & \equiv \forall x : \neg P(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

とすればよい. 「全ての x で $P(x)$ である」が嘘になるには, $P(x)$ でない x が少なくとも 1 つあればよい.

§5 全体集合という空想

以上に導入した公理的方法を使って, 紙に書ける空想物としての力学を構成していくが, そのような空想物の収容場所として, 集合なるもの^{a)}を導入しておく.

定義 1.6 (集合): そこに属すかどうかが明確に定められた事物の集まりを, 集合という.

- x が集合 X の元^{b)}であることを, $x \in X$ と書く.
- 元でないことを $x \notin X$ と書く.

$x \in X$ は命題であり, $x \notin X \equiv \neg(x \in X)$ がいえる.

この定義により, 全ての集合演算は, 数理論理学に帰着する. 試しに集合論の公式 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を証明してみよう. そのために次の定義をおく.

- (1) $(x \in A \wedge x \in B)$ を, $x \in A \cap B$ と表記する.
- (2) $(x \in A \vee x \in B)$ を, $x \in A \cup B$ と表記する.
- (3) $(x \in A \iff x \in B)$ を, $A = B$ と表記する.

このとき,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) & \iff (x \in A) \wedge (x \in B \cup C) \quad \because (1) \\ & \iff \underbrace{(x \in A)}_P \wedge (\underbrace{(x \in B)}_Q \vee \underbrace{(x \in C)}_R) \quad \because (2) \\ & \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \quad \because \text{定理 1.2 (d)} \\ & \iff (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \quad \because (1) \\ & \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \because (2) \end{aligned}$$

ゆえに $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(3) よりこれは $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を意味する. 証明おわり.

定義 1.6 によれば, 具体的な集合を与えるときに, 要素を全て列挙してみせる必要はない. 集合に入る入らないの基準さえあれば, それは集合と見なせる.

その結果, 全体集合という空想が正当化される. 例えば「 2×2 行列の全体集合」といったときに, 無限個ある 2×2 行列を全て列挙してみせることはできないが, 2×2 行列かどうかは誰にでも判別できるので, その全体集合が定義できる. 同様にして, 自然数, 実数, 複素数のそれぞれ全体集合 $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ などを定義できる.

- 「 x は実数」という命題は, $x \in \mathbb{R}$ と書ける.

その他, 実数の n 個組 (x_1, \dots, x_n) の全体を \mathbb{R}^n と書く.

^{a)} これまた空想物.

^{b)} 元=要素.

Multibody Dynamics

(第2回 筆算用のベクトル)

吉田勝俊

2006年10月13日

物理ベクトルとは全く別の方法で、紙に書ける空想物としてのベクトルを構成したい。

§1 筆算用のベクトル

大きさと方向を持ち、矢印で図示され、太字 x, y で書かれるべきもの。これが我々の脳裏にある最も素朴なベクトル像であろうか。

ベクトルの便利さは、それが物理的には力ベクトルだろうが、位置ベクトルだろうが、全く同じ算法が使えるところにある。ようするに、「ベクトル x, y 」という空想の本質は、それ自体よりもむしろ、その算法の側にある。

そこで、ベクトルかどうかの判定基準を、次の8つの算術公式に集約してしまうのが現代の常套手段である。

定義 2.1 (線形空間): 加法 $x + y$, スカラ倍 λx , 等号 $=$ について、次の8公式が使える太字 x, y, \dots の全体集合 L を、線形空間 (linear space) という。

$$(L1) \quad x + y = y + x \quad (\text{交換則})$$

$$(L2) \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{結合則})$$

$$(L3) \quad \text{零ベクトル } \mathbb{0}_L \text{ が使えて、どんな } x \text{ でも、} \\ x + \mathbb{0}_L = \mathbb{0}_L + x = x \quad (\text{零元の存在})$$

$$(L4) \quad \text{どんな } x \text{ にも、逆ベクトル } \bar{x} \text{ が作れて、} \\ x + \bar{x} = \bar{x} + x = \mathbb{0}_L. \quad (\text{逆元の存在})$$

$$(L5) \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

$$(L6) \quad 1 \in \mathbb{R} \text{ の作用は、} 1x = x$$

$$(L7) \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$$(L8) \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

線形空間の元を、ベクトル (vector) という。逆元 \bar{x} を $-x$ とも書く。線形空間をベクトル空間ともいう。加法とスカラ倍を線形演算 (linear operation) と総称する。

定義 2.1 のベクトルは具体形が不明だが、加法 $x + y$, スカラ倍 λx , 等号 $=$, 零元 $\mathbb{0}$, 逆元 \bar{x} を用いた式変形 (L1) ~ (L8) が可能である。式変形だけで何が分かるのか、定義 2.1 と整合する有名な「 \square 」を挙げておこう。

定理 2.1 ($0, -1 \in \mathbb{R}$ の作用): V を線形空間とする。

- $0 \in \mathbb{R}$ の作用は、 $0x = \mathbb{0}_L$ for $\forall x \in L$.
- $-1 \in \mathbb{R}$ の作用は、 $(-1)x = \bar{x}$ for $\forall x \in L$.

Report 2: 定義 2.1 との整合性を示せ。

§2 幾何ベクトル

定義 2.1 のベクトルはあくまで紙面上の筆算用であり、このままでは外界と何ら関連を持たない。筆算と外界をつなぐ基本ルールを追加しよう。

定義 2.2 (幾何ベクトル): V を有向線分の全体集合とする。 $x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ の間の算法を3種類導入する。

- (1) 等号: $x = y \stackrel{\text{定義}}{\iff} x$ と y の向きと長さが等しい。長さ0のときは方向によらず等しいと定める。
- (2) 加法: $x + y \stackrel{\text{定義}}{\iff} x$ の終点を y の始点としたとき、 x の始点から y の終点に向う有向線分。
- (3) スカラ倍: $\lambda x \stackrel{\text{定義}}{\iff} x$ の長さを λ 倍した有向線分。

等号と線型演算 (1) ~ (3) が付与された有向線分 $x \in V$ を、幾何ベクトル (geometric vector) という。その全体集合を幾何ベクトル空間という。

公理 1: 幾何ベクトル空間 V は、線形空間をなす。

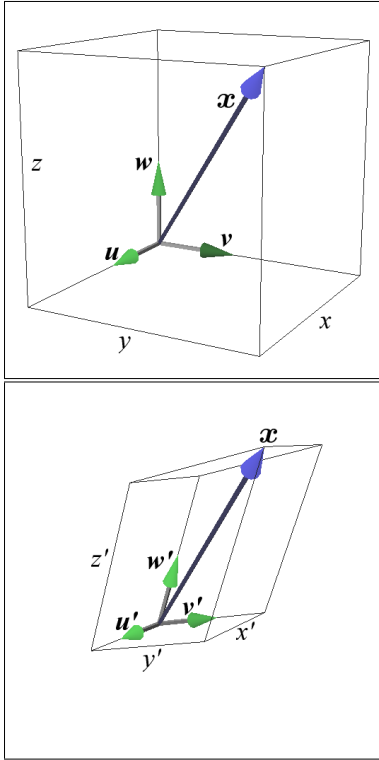
この公理の信憑性は紙の上では検証できない。物理的な検証実験を行なう以外にない。公理的方法では、このような紙面上では検証できない基本法則を、基本ルールに位置付けて話を進める。

課題 1 V における (L2) の成立を、図形的に示せ。

§3 幾何ベクトルの直線座標

幾何ベクトル $x \in V$ は図形であり、間違っても数値の組 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ではない。このような図形を数値化するには、別途、座標 (coordinate) という人為的概念が必要になる。

多くの力学書で暗黙に使われている幾何ベクトル $x \in V$ の座標とは、図形的には $x \in V$ を対角線とする「平行6面体の3辺の寸法」のことである。



左右の寸法 $(x, y, z)^T, (x', y', z')^T \in \mathbb{R}^3$ は互いに数値が異なるが、いずれも幾何ベクトル $x \in V$ の座標である。このように、どんな平行6面体を使うかによって座標は変化する。特に直方体で測った座標を直交座標、それ以外を斜交座標といい、両者を直線座標と総称する。

Multibody Dynamics

(第3回 ベクトルの成分表示)

吉田勝俊

2006年10月20日

§1 座標写像

図1に示すような、平行6面体 \mathcal{P} による測定操作を、次のように模式化する。

$$V \ni x \xrightarrow{\text{測定操作 } \varphi_{\mathcal{P}}} \tilde{x} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

つまり、測定操作 $\varphi_{\mathcal{P}}$ は、図形 $x \in V$ に数ベクトル $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ を割り当てる \mathbb{R}^3 値関数としてモデル化できる。

測定操作 $\varphi_{\mathcal{P}}$ を筆算できるようにするため、平行6面体そのものではなく、平行6面体の3辺に沿った単位幾何ベクトルの組 $B = \langle u, v, w \rangle$ をとる。別の平行6面体なら $B' = \langle u', v', w' \rangle$ 等々である。このようなベクトルの組 B や B' を、 V の基底という。特に、単位立方体の3辺からなる基底 $\mathcal{E} = \langle i, j, k \rangle$ を正規直交基底という。どんな $x \in V$ でも、基底の線形結合で、

$$x = xu + yv + zw = x'u' + y'v' + z'w' \quad (3.1)$$

と書けるが、基底 $\langle u, v, w \rangle, \langle u', v', w' \rangle$ がそれぞれの平行6面体の取り方を表わし、展開係数 $(x, y, z)^T, (x', y', z')^T$ が $x \in V$ の各座標となる。このような基底と係数の関係に着目すると、幾何ベクトルから座標を採取する操作を数学的に定式化できる。

定義 3.1 (座標写像): 幾何ベクトル空間 V から、基底 $B = \langle u, v, w \rangle$ を1つ選んで固定する。 $x \in V$ を $x = xu + yv + zw$ と展開したときの係数 $x, y, z \in \mathbb{R}$ を見つける操作:

$$\varphi_B(x) = \varphi_{\langle u, v, w \rangle}(xu + yv + zw) \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

を、 B が定める座標写像 (coordinate map) と呼ぶ。 $x \in V$ に対する $\tilde{x} \equiv \varphi_B(x) \in \mathbb{R}^3$ を、 B で測った $x \in V$ の座標 (coordinate) もしくは成分 (component) という。 x_i を成分とする $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ を、 $\tilde{x} = [x_i]$ と書く。

このように、幾何ベクトル $x \in V$ と座標 (ベクトル) $\tilde{x} = \varphi_B(x) = [x_i] \in \mathbb{R}^3$ は全くの別物である。 $x \in V$ は基底と同列に存在できるが、 $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ は基底が無いと定義すらできない。

例 3: $B = \langle u, v, w \rangle$ で測った $x = 2v + w \in V$ の座標を求めよ。

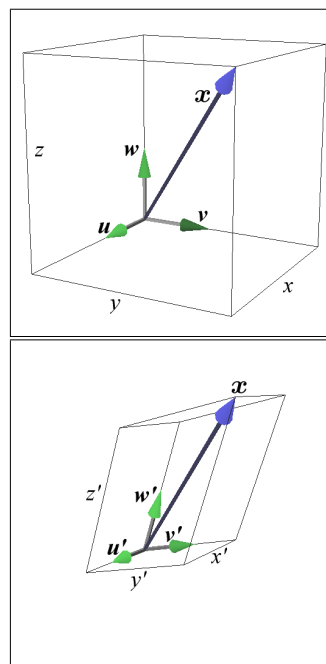


図1 ベクトルの座標

- (1) $2v + w = \boxed{?}u + \boxed{?}v + \boxed{?}w$ の空欄を埋めると、 $2v + w = 0u + 2v + 1w$ となる。
- (2) 係数を抜き出して、 $\varphi_B(x) = \varphi_{\langle u, v, w \rangle}(0u + 2v + 1w) = (0, 2, 1)^T$ を得る。

課題 2 同じ x について、 $B' = \langle u - v, u + v, w \rangle$ で測った座標 $\varphi_{B'}(x)$ を求めよ。 $2v + w = \boxed{?}(u - v) + \boxed{?}(u + v) + \boxed{?}w$ の空欄を埋めればよい。

定理 3.1 (座標写像の線形性): 数ベクトルの算法を前提に、次が示せる。

- $\varphi_B(x + y) = \varphi_B(x) + \varphi_B(y)$.
- $\varphi_B(\lambda x) = \lambda \varphi_B(x)$. ($\lambda \in \mathbb{R}$)

§2 基底の公理

以上、基底と座標を直感的に導入したが、このままだと問題が起きる。例えば、 u, v, w が同一平面内にあると、その外にあるベクトルの座標が測れない。このような病的状況を排除するために、次の定義を採用する。

定義 3.2 (基底): 次の 2 条件を満足するベクトルの組 $u, v, w \in V$ を, V の基底 (basis) といい, $B = \langle u, v, w \rangle$ などと書く.

- (1) どんな $x \in V$ でも $x = xu + yv + zw$ と書ける.
- (2) そのときの係数 $x, y, z \in \mathbb{K}$ の決まり方が一意である (成分表示の一意性).

基底を作るのに必要なベクトルの個数を V の次元 (dimension) といい $\dim V$ と書く.

基底でない例を挙げる. $B = \langle u, v, w \rangle$ に $u = v + w$ という付帯条件をつけよう. このとき u, v, w は同一平面内にある. ここで試しに $x = 2u + v + w$ をとると,

$$\begin{aligned} x &= 2u + v + w = 3u + 0v + 0w \\ &= 0u + 3v + 3w = u + 2v + 2w \end{aligned}$$

などなど, 係数が一意に決まらないので, このような B は基底ではない.

§3 基底の回転

基底を回したときの座標変換を与えておく. 単位ベクトル $a \in V$ を回転軸として, $x \in V$ を角度 θ だけ回す変換を $R_{a:\theta}$ と書く^{a)}, 回転後のベクトルは,

$$y = R_{a:\theta}(x) \quad \in V \quad (3.2)$$

と書ける. ベクトル $x, y \in V$ を直交座標で $\tilde{x} = \varphi_{\mathcal{E}}(x)$, $\tilde{y} = \varphi_{\mathcal{E}}(y) \in \mathbb{R}^3$ と表わすと, 回転変換による座標の変化は, 適当な 3×3 行列 $[R_{a:\theta}]$ と数ベクトルの積によって,

$$\tilde{y} = [R_{a:\theta}] \tilde{x} \quad \in \mathbb{R}^3 \quad (3.3)$$

と書ける. 3×3 行列 $[R_{a:\theta}]$ を, 回転変換 $R_{a:\theta}$ の行列表示, もしくは回転行列という. 正規直交基底に対する成分を求めてみると, ($\sin \theta = S_{\theta}$, $\cos \theta = C_{\theta}$ と略記)

$$[R_{a:\theta}] = \begin{bmatrix} \alpha^2 + (1 - \alpha^2)C_{\theta} & \alpha\beta(1 - C_{\theta}) - \gamma S_{\theta} & \alpha\gamma(1 - C_{\theta}) + \beta S_{\theta} \\ \alpha\beta(1 - C_{\theta}) + \gamma S_{\theta} & \beta^2 + (1 - \beta^2)C_{\theta} & \beta\gamma(1 - C_{\theta}) - \alpha S_{\theta} \\ \alpha\gamma(1 - C_{\theta}) - \beta S_{\theta} & \beta\gamma(1 - C_{\theta}) + \alpha S_{\theta} & \gamma^2 + (1 - \gamma^2)C_{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

となる^{b)}. ただし α, β, γ は, 回転軸 $a \in V$, $\|a\| = 1$ の座標 $\varphi_{\mathcal{E}}(a) = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ である.

定理 3.2 (基底の回転): $R_{a:\theta}$ で回転させた基底 $\mathcal{E} = \langle i, j, k \rangle$ を, $R_{a:\theta}(\mathcal{E}) \equiv \langle R_{a:\theta}(i), R_{a:\theta}(j), R_{a:\theta}(k) \rangle$ と書くとき,

$$\varphi_{R_{a:\theta}(\mathcal{E})}(x) = [R_{a:\theta}]^{-1} \varphi_{\mathcal{E}}(x) \quad ([R_{a:\theta}]^{-1} = [R_{a:-\theta}]) \quad (3.5)$$

となる. すなわち, ある幾何ベクトル $x \in V$ について, 回転後の基底 $R_{a:\theta}(\mathcal{E})$ で測った座標は, 回転前の基底 \mathcal{E}

^{a)} 我々はドアノブの回転を知っている. あの回転である. 具体的な算法は 6 章 (p6-1) で構成する.

^{b)} 定義 6.3 (p6-2) 参照. 同じベクトルでも基底を変えると座標値が変わるが, これに運動して回転行列の成分も変わる.

で測った座標を逆回転させた座標に等しい. $[R_{a:\theta}]^{-1}$ を, 基底の回転 $\mathcal{E} \rightarrow R_{a:\theta}(\mathcal{E})$ に伴う座標変換行列という.

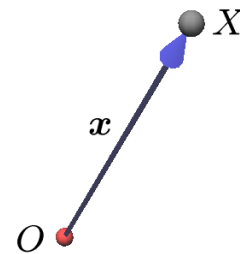
課題 3 定理の「すなわち」以降を, $x \in V$ を風景, 基底をカメラ, 座標を映像に言い換えて述べよ.

§4 空間座標

以上を応用すると, 空間の点の座標を測ることができ. 我々が住むこの物理空間を \mathcal{A} と書き, \mathcal{A} は点集合であると仮定する^{c)}. ここで, 物理空間の点 $X \in \mathcal{A}$ の配置を記録するには,

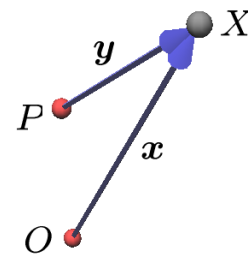
1. 物理空間に原点 $O \in \mathcal{A}$ を定める.
2. 原点 $O \in \mathcal{A}$ から点 $X \in \mathcal{A}$ に向う幾何ベクトル $x \in V$ をとる.

という操作を実行すればよからう.



こうして定めた $x \in V$ を, $O \in \mathcal{A}$ で定まる $X \in \mathcal{A}$ の位置ベクトル (position vector) と呼ぶ. このベクトルの成分 $\tilde{x} \equiv \varphi_{\mathcal{E}}(x) \in \mathbb{R}^3$ が, 空間の点 $X \in \mathcal{A}$ の座標である.

ただし, 同じ $X \in \mathcal{A}$ を別の原点 $P \in \mathcal{A}$ で測ると, x だった位置ベクトルが y に変化し, したがって座標も変化してしまう.



のみならず, 原点が同じでも基底を取り換えれば, これまた別の座標値が得られる.

ということで, 空間の点の座標を確定させるには, 原点 $O \in \mathcal{A}$ と基底 \mathcal{E} のペアを固定しなければならない. このペア (O, \mathcal{E}) を座標系という.

^{c)} 点集合と仮定することの是非は本書では問わない. 点集合と仮定しない宇宙論もあるようである.

Multibody Dynamics

(第4回 直線座標系)

吉田勝俊

2006年10月27日

§1 筆算用の内積

我々の幾何ベクトル空間 V では、まだ、長さや直交性を筆算できない。これらは内積として一括導入できる。

定義 4.1 (内積): 次の法則で計算可能なベクトルの積 $x \cdot y \in \mathbb{R}$ を、一般に内積 (inner product) という。

- (I1) 双線形性: $x \cdot (\lambda y + \mu z) = \lambda(x \cdot y) + \mu(x \cdot z)$,
 $(\lambda x + \mu y) \cdot z = \lambda(x \cdot z) + \mu(y \cdot z)$.
- (I2) 対称性: $x \cdot y = y \cdot x$.
- (I3) 正定値性: $x \cdot x \geq 0$. 特に $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}_V$.

ここに, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in V$.

定理 4.1: $x = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow a \cdot x = 0$ for $\forall a \in V$.

証明は付録参照。

定義 4.2 (ノルム): $\|x\| := \sqrt{x \cdot x} \in \mathbb{R}$ を、ベクトル $x \in V$ のノルム (norm) または長さという。

定義 4.3 (直交性): $x \perp y \in V \stackrel{\text{定義}}{\Leftrightarrow} x \cdot y = 0$.

定理 4.2 (物理空間の内積): $x, y \in V$ を 2 辺とする三角形に余弦定理 $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta$ が成立するとき、定義 4.1 の内積の値は、

$$x \cdot y = \|x\|\|y\|\cos\theta$$

に等しい。ただし θ は x, y のなす角。

ヒント) 内積の算法と余弦定理が両立するには?

§2 内積の数値計算

定義 4.4 (正規直交基底): 基底 $\mathcal{E} := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$:

$$u_i \cdot u_j = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } i = j. \text{ (正規性)} \\ 0 & \text{if } i \neq j. \text{ (直交性)} \end{cases}$$

を、正規直交基底 (orthonormal basis) という。 δ_{ij} をクロネッカーのデルタ (Kronecker's delta) という。正規直交基底で測った座標を正規直交座標という。

定理 4.3 (内積の値): 内積 $x \cdot y$ の数値は、正規直交座標 $\tilde{x} = \varphi_{\mathcal{E}}(x)$, $\tilde{y} = \varphi_{\mathcal{E}}(y)$ の標準的な内積に一致する。

$$x \cdot y = \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle := \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

ヒント) $x, y \in V$ は基底 \mathcal{E} の線形結合で、それぞれ、 $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$, $y = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ と書ける。 $(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) \cdot (y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3)$ を双線形性で展開し、定義 4.4 (p4-1) で整理せよ。

したがって、正規直交座標 $[x_i] = \varphi_{\mathcal{E}}(x)$ を使うと、長さは三平方の定理 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ で書ける。

§3 位置ベクトルの算法

我々が住むこの 3 次元空間を点集合 \mathcal{A} と見なす。空間の点 $P \in \mathcal{A}$ の位置を、ベクトル $p \in V$ で測量する。

定義 4.5 (平行移動): そのために、空間の点 $P \in \mathcal{A}$ とベクトル $p \in V$ のペアに、別の点を対応づける算法:

$$P \in \mathcal{A}, p \in V \Rightarrow P \hat{+} p \in \mathcal{A}$$

(A1) $P \hat{+} \mathbf{0}_V = P$.

(A2) $(P \hat{+} p) \hat{+} q = P \hat{+} (p + q)$.

(A3) $O, X \in \mathcal{A} \Rightarrow \exists! x \in V$ s.t. $X = O \hat{+} x$.

を導入する。算法 “ $\hat{+}$ ” を平行移動 (translation) という。この算法が使える点集合と線形空間のペア (\mathcal{A}, V) を、アファイン空間という。

定義 4.6 (位置ベクトル): 原点 $O \in \mathcal{A}$ を定めると、 $P \in \mathcal{A}$ は一意に、

$$P = O \hat{+} p \quad \therefore \text{(A3)}$$

と書ける。このときの $p \in V$ を、原点 O で測った $P \in \mathcal{A}$ の位置ベクトル (position vector) という。

例 4 (原点の交換): $O \in \mathcal{A}$ から測った $P \in \mathcal{A}$ の位置ベクトルを $p \in V$, $P \in \mathcal{A}$ から測った $R \in \mathcal{A}$ の位置ベクトルを $r \in V$ とする。このとき、 $O \in \mathcal{A}$ から測った $R \in \mathcal{A}$ の位置ベクトルを求めよ。

$P = O \hat{+} p$ を $R = P \hat{+} r$ に代入すると

$$\begin{aligned} R &= (O \hat{+} p) \hat{+} r \\ &= O \hat{+} (p + r) \quad \therefore \text{(A2)} \end{aligned}$$

だから、 $O \in \mathcal{A}$ から測った $R \in \mathcal{A}$ の位置ベクトルは $p + r$ である。

課題 4 物理空間の 4 点 $O, P, Q, R \in \mathcal{A}$ が、

$$P = Q \hat{+} p, Q = O \hat{+} q, R = P \hat{+} r, \quad p, q, r \in V$$

の関係にあるとき、 $O \in \mathcal{A}$ から測った $R \in \mathcal{A}$ の位置ベクトル $v \in V$ を求めよ。

定義 4.7 (空間座標): $P = O \hat{+} p$ とする. 位置ベクトル $p \in V$ の座標:

$$\tilde{p} = \varphi_B(p) \in \mathbb{R}^3$$

を, 原点 O と基底 B で測った $P \in \mathcal{A}$ の空間座標 (spatial coordinate) という. 原点を明示したいときは, $\tilde{p} = \varphi_B^O(p)$ と書く.

略記法 簡単のため, 内積をまねた略記法:

$$\tilde{x} \cdot \vec{B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \langle u, v, w \rangle := x_1 u + x_2 v + x_3 w$$

を導入する. 基底と座標の関係が,

$$x = \varphi_B(x) \cdot \vec{B} \quad (= x_1 u + x_2 v + x_3 w)$$

のように短かく書ける. ゆえに点 $P \in \mathcal{A}$ は,

$$P = O \hat{+} p = O \hat{+} \varphi_B(p) \cdot \vec{B}$$

と書いて, (O, B) を陽に記せて便利. 以上,

$$P = O \hat{+} \tilde{p} \cdot \vec{B} \quad (= O \hat{+} \varphi_B(p) \cdot \vec{B})$$

と書けたときの $\tilde{p} \in \mathbb{R}^3$ を, O と B で測った $P \in \mathcal{A}$ の空間座標という.

§4 直線座標系

定義 4.7 によれば, 点 $P \in \mathcal{A}$ の座標 $\tilde{p} \in \mathbb{R}^3$ が確定するには, 原点 $O \in \mathcal{A}$ と基底 $B \subset V$ のペアを指定する必要がある. このペアには名前がある.

定義 4.8 (直線座標系): 基準点 $O \in \mathcal{A}$ と基底 $B \subset V$ のペア $\mathcal{F} \equiv (O, B)$ を, 直線座標系 (linear coordinate system), または枠 (frame), フレームという.

例えば, $\mathcal{F} = (O, B)$ で測った $P \in \mathcal{A}$ の座標が $\tilde{p} \in \mathbb{R}^3$ であるとき, 点 $P \in \mathcal{A}$ は,

$$P = O \hat{+} \tilde{p} \cdot \vec{B} = O \hat{+} \varphi_B(p) \cdot \vec{B}$$

と数式表現できる.

ある直線座標系 (O, \mathcal{E}) と, これを回転・平行移動した直線座標系 $(O \hat{+} r, R(\mathcal{E}))$ を考える. (R は回転軸 $a \in V$ まわりに角度 θ だけ回す変換)

定理 4.4 (枠の変更): $P \in \mathcal{A}$ の空間座標が, 直線座標系 (O, \mathcal{E}) , $(O \hat{+} r, R(\mathcal{E}))$ によって, それぞれ,

$$P \in \mathcal{A} \xrightarrow{(O, \mathcal{E})} \tilde{p} \in \mathbb{R}^3$$

$$P \in \mathcal{A} \xrightarrow{(O \hat{+} r, R(\mathcal{E}))} \tilde{p}' \in \mathbb{R}^3,$$

のように測られたとする. すなわち $O \hat{+} \tilde{p} \cdot \mathcal{E} = P = (O \hat{+} r) \hat{+} \tilde{p}' \cdot R(\mathcal{E})$. このとき,

$$\tilde{p} = \varphi_{\mathcal{E}}(r) + [R] \tilde{p}'$$

が成立する. このような回してから ($[R]$), 平行移動する ($\varphi_{\mathcal{E}}(r) +$) ような変換を, アファイン変換 (affine transformation) という.

ヒント) 定理 3.1 (p3-1), 定理 3.2 (p3-2), 定義 4.5 (p4-1) を使う.

$$P = (O \hat{+} r) \hat{+} p' = O \hat{+} (r + p') \quad \because (A2)$$

$$= O \hat{+} \varphi_{\mathcal{E}}(r + p') \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \because \text{略記法}$$

$$= O \hat{+} (\varphi_{\mathcal{E}}(r) + \varphi_{\mathcal{E}}(p')) \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \because \text{定理 3.1}$$

$$= O \hat{+} (\varphi_{\mathcal{E}}(r) + \varphi_{R^{-1}R(\mathcal{E})}(p')) \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \because \text{逆写像}$$

$$= O \hat{+} (\varphi_{\mathcal{E}}(r) + [R] \varphi_{R(\mathcal{E})}(p')) \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \because \text{定理 3.2}$$

§ 付録

定理 4.1 の証明 まず 「 $x = \mathbb{0}_V \implies a \cdot x = 0, \forall a$ 」を示す. $x = \mathbb{0}_V$ を仮定すると,

$$a \cdot x = a \cdot \mathbb{0}_V = a \cdot (0a) \quad 0 \in \mathbb{R} \text{ の作用 (p2-1)}$$

$$= 0(a \cdot a) \quad (I1)$$

$$= 0 \quad \text{算数.}$$

と計算できる. どんな a でも成立するから, 題意を得る.

次に 「 $x = \mathbb{0}_V \iff a \cdot x = 0, \forall a$ 」を示すが, 簡単のために, これと同値な対偶^{a)}:

$$\neg(x = \mathbb{0}_V) \implies \neg(a \cdot x = 0, \forall a)$$

を示す. $x = \mathbb{0}_V$ の否定は $x \neq \mathbb{0}_V, a \cdot x = 0, \forall a$ の否定は $a \cdot x \neq 0, \exists a$ であるから^{b)}, 次を示せばよい.

$$(x \neq \mathbb{0}_V) \implies (a \cdot x \neq 0, \exists a) \quad (*)$$

この (*) は, a の存在を主張する命題である. 一般に存在を証明するには, 該当するものが実際に発見できればよい. つまり, 試行錯誤的に a の候補を作り, それが条件を満たせば証明完了である.

まず題意の通り $x \neq \mathbb{0}_V$ を仮定する. ここで a の候補として試しに $a = x$ をとる. このとき,

$$a \cdot x = x \cdot x \geq 0 \quad \because (I3) \text{ 正定性}$$

となるが, (I3) の後半より $x = \mathbb{0}_V$ の場合にしか $x \cdot x = 0$ の可能性はないので, 結局, $x \cdot x > 0$ となり, この候補は $a \cdot x \neq 0$ を満足する.

以上, 具体的な a の見付け方 $a = x$ が判明したので, 命題 (*) は真である. ゆえに \iff の証明が完了した.

^{a)} 定理 1.2 (p1-2) の (g).

^{b)} 「全ての a で ~ である」の否定は 「~ でない a が少くとも一つある」になる. 式 (1.1) (p1-2) 参照.

Multibody Dynamics

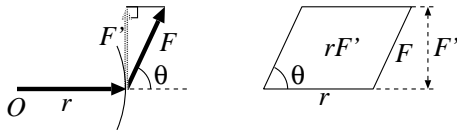
(第5回 外積)

吉田勝俊

2006年11月18日

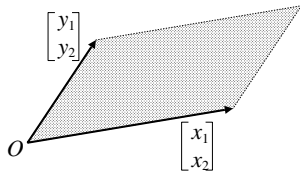
§1 平行四辺形

物理量には、図形的に、平行四辺形の面積であるものも少なくない。例えば、原点 O から r だけ離れた点に力 F が作用するとき、原点を回そうとする作用、すなわちトルク (torque) の大きさ S は、 r と、 F の回転方向成分 F' の積 $S = rF'$ として定義される。



$F' = F \sin \theta$ より $S = rF' = rF \sin \theta$ となり、 S は r 、 F を 2 辺とする平行四辺形の面積である。

平面ベクトル $x, y \in V$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を $D(x, y)$ と表記しよう。その値を x, y の座標成分で書き下したい。



定理 5.1: 平行四辺形の面積 $D(x, y)$ は、 x, y の正規直交座標 $[x_i], [y_i] \in \mathbb{R}^2$ からなる 2 次行列式、

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

に一致する。 $D(x, y)$ を一般に符号付面積という。

課題 5 示せ。(長方形から余計な三角形を除く)

例えば、冒頭の平面内のトルクは、 r, F の正規直交座標 $[r_i], [F_i] \in \mathbb{R}^2$ を用いて、 $D(r, F) = r_1 F_2 - F_1 r_2$ と計算できる。

1 つ次元を上げて、 $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ を 3 辺とする平行六面体の体積を $D(x, y, z)$ と書こう。

定理 5.2: 平行六面体の体積 $D(x, y, z)$ は、 x, y, z の正規直交座標 $[x_i], [y_i], [z_i] \in \mathbb{R}^3$ からなる 3 次行列式、

$$D(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

に一致する。 $D(x, y, z)$ を一般に符号付体積という。

§2 外積

平面上の符号付面積 $D(x, y)$ を、平面から引き剥して、3 次元空間 \mathbb{R}^3 に配置したものを、 \mathbb{R}^3 の外積という。

定義 5.1 (面ベクトル): 平面図形 S に垂直で、長さが S の面積 S に等しい幾何ベクトル $s \in V$ を、 S の面ベクトル (surface vector) という。

公理 2 (面ベクトルの座標): $\mathcal{E} := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ を正規直交基底とする。面ベクトル:

$$s = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3$$

の直交座標成分 S_i は、基底ベクトル u_i を法線とする面に投影された S の正射影^{a)} の面積に一致する。(正規直交基底について $S_i = s \cdot u_i$ に注意しておく)

課題 6 図示せよ。

定義 5.2 (外積): $a, b \in V$ を 2 辺とする平行四辺形 \mathcal{R}_{ab} の面ベクトル:

$$s \equiv a \times b \in V$$

を、 a と b の外積 (cross product) と呼ぶ。 s の向きは、 a から b へ回した右ねじの進行方向とする (右手系)。

平行四辺形 \mathcal{R}_{ab} の正射影は平行四辺形だから、外積の座標は符号付面積で書ける。 $a = [a_i] \in \mathbb{R}^3$ に対して、

$$a_1 := \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, a_2 := \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}, a_3 := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

と表記する。

定理 5.3 (外積の座標): 外積 $a \times b$ の正規直交座標は、 $a \times b = D(a_1, b_1)u_1 + D(a_2, b_2)u_2 + D(a_3, b_3)u_3$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} u_1 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} u_3 \quad (5.2)$$

と書ける。

定理 5.4 (外積の基本法則): 次の公式が成立する。

(O1) 双線形性: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda a + \mu b) \times c = \lambda(a \times c) + \mu(b \times c),$$

$$a \times (\lambda b + \mu c) = \lambda(a \times b) + \mu(a \times c).$$

^{a)} 投影面に垂直な平行光線による射影を正射影 (または直交射影, orthogonal projection) という。

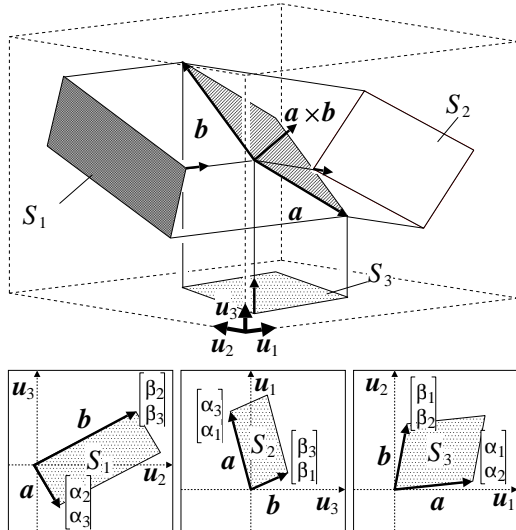


図2 外積の座標

- $D(\lambda x + \mu y, x_2, x_3) = \lambda D(x, x_2, x_3) + \mu D(y, x_2, x_3),$
 $D(x_1, \lambda x + \mu y, x_3) = \lambda D(x_1, x, x_3) + \mu D(x_1, y, x_3),$
 $D(x_1, x_2, \lambda x + \mu y) = \lambda D(x_1, x_2, x) + \mu D(x_1, x_2, y).$
- (2) 歪対称性 (任意の2つを入れ替えると符号が反転):
- $$D(x_1, x_2, x_3) = -D(x_2, x_1, x_3)$$
- $$= -D(x_1, x_3, x_2) = -D(x_3, x_2, x_1).$$
- ゆえに $D(x, x, y) = D(x, y, y) = D(x, y, x) = 0.$
- (3) 単位体積: 正規直交基底 $\mathcal{E} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ について, $D(u_1, u_2, u_3) = 1.$

この $D(x, y, z)$ を, 符号付体積 (signed volume) という.

公理4を前提に定理5.2が証明できる. $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$, $y = y_1 u_1 + \dots$ 等を代入し整理せよ.

- (O2) 歪対称性: $a \times b = -b \times a$. ゆえに $a \times a = \mathbf{0}_V$.
- (O3) 正規直交基底 $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ について,
- $$u_1 \times u_2 = u_3, u_2 \times u_3 = u_1, u_3 \times u_1 = u_2.$$

命題 5.5 (三重積と四重積): 力学に便利な公式たち.

- (O4) スカラ三重積: D は符号付体積
- $$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c = D(a, b, c).$$
- (O5) ベクトル三重積: $(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a,$
- $$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c.$$
- (O6) ベクトル四重積:
- $$a \times (b \times (a \times b)) = b \times (a \times (a \times b)).$$

課題7 数式処理ソフトで (O1) ~ (O6) の成立を示せ.

§ 付録

以下の基本ルール () を用いると, 行列式を使わないで $D(\dots)$ のまま筆算できる.

公理3 (符号付面積): $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ とする.

- (1) 双線形性 (2重線形性):
- $$D(\lambda x + \mu y, z) = \lambda D(x, z) + \mu D(y, z), D(x, \lambda y + \mu z) = \lambda D(x, y) + \mu D(x, z).$$
- (2) 歪対称性 (わいたいしょうせい): $D(x, y) = -D(y, x)$. ゆえに $D(x, x) = 0$.
- (3) 単位面積: 正規直交基底 $\mathcal{E} = \langle u_1, u_2 \rangle$ について,
- $$D(u_1, u_2) = 1.$$

以上に従う $D(x, y)$ を, 符号付面積 (signed area) と呼ぶ.

公理4 (符号付体積): $x_1, x_2, x_3, x, y \in \mathbb{R}^3$ とする.

- (1) 3重線形性:

Multibody Dynamics

(第6回 回転変換と行列表示)

吉田勝俊

2006年12月1日

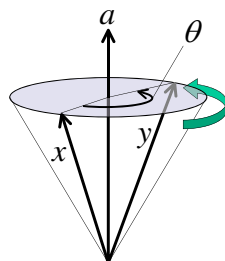
§1 回転変換

回転後のベクトル y を, 回転軸 a , 回転角 θ , 回転前のベクトル x の関係式として書き下したい.

定理 6.1 (回転変換): 単位ベクトル $a \in V$ を回転軸として, $x \in V$ を角度 θ だけ回転させる変換は,

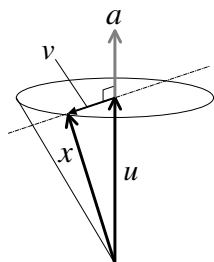
$$R_{a,\theta}(x) := (a \cdot x)a + \cos\theta(x - (a \cdot x)a) + \sin\theta(a \times x)$$

と書ける.



次のように証明できる. まず, x を, 回転軸 a 方向の成分 u と, 円盤上の成分 v に分解する.

$$x = u + v \quad (6.1)$$



a と x のなす角を α とすると, u の長さは $\|u\| = \|x\| \cos\alpha$ と書けるが, $\|a\| = 1$ を仮定しているので, $\|u\| = \|a\| \|x\| \cos\alpha = a \cdot x$ となる. 単位ベクトル a の方向に u をとったから, 結局のところ,

$$u = \|u\|a = (a \cdot x)a \quad (6.2)$$

という表現を得る. したがって,

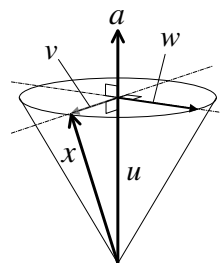
$$v = x - (a \cdot x)a \quad (6.3)$$

である. 以上, 円盤にぴったり収まるベクトルが1本, v として確保できた.

次に, 同じ円盤上で v と直交するもう一つのベクトル,

$$w = a \times x \quad (6.4)$$

を作る. 外積の定義より, w は, a, x を2辺とする平行四辺形に直交するから, たしかに w は円盤に平行かつ v に直角である.



w が円盤にぴったり収まること, すなわち $\|w\| = \|v\|$ を示しておく. a, x のなす角を α とすると, まず, 外積の定義より, $\|w\| = \|a \times x\| = \|a\| \|x\| \sin\alpha = \|x\| \sin\alpha$ が言える. 他方, u, v, x の直角三角形に着目すると, $\|v\| = \|x\| \sin\alpha$ であり, したがって,

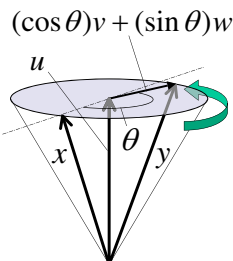
$$\|w\| = \|x\| \sin\alpha = \|v\|$$

となる. 以上, 円盤上に直交ベクトル v, w を確保できた.

最後に, 円盤上で v を θ だけ回したベクトルは,

$$v' = \cos\theta v + \sin\theta w$$

と書けるから, $y = u + v' = u + \cos\theta v + \sin\theta w$ がいえる. これに (6.2) ~ (6.4) を代入して, 定理 6.1 の式: $y = (a \cdot x)a + \cos\theta(x - (a \cdot x)a) + \sin\theta(a \times x)$ を得る.



§2 角速度

定理 6.2 (角速度): 回転軸 $a \in V$ ($\|a\| = 1$) に, 回転角の時間微分 $\dot{\theta} \in \mathbb{R}$ を乗じた $\omega := \dot{\theta}a \in V$ を角速度

(angular velocity) という。点 $O \in A$ を中心に角速度 ω で回転する点 $P = O + x$ の速度は、

$$\dot{x} = \omega \times x$$

と書ける。

ヒント) $\theta = \theta(t)$ と見て、回転変換 $y(t) = R_{a:\theta(t)}(x)$ を時間微分すると、 $\dot{y}(t) = \mathbb{O} - \dot{\theta} \sin \theta (x - (a \cdot x)a) + \dot{\theta} \cos \theta (a \times x)$ だが、作図より $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)|_{\theta=0}$ 。

定理 6.3 (角速度の加法性): $O \in A$ を中心に $\omega_1 \in V$ で回転する剛体^{a)} を、同時に $\omega_2 \in V$ でも回転させる (O は同じ)。このとき、剛体上の点 P の角速度は、ベクトルの加法で $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in V$ と書ける。

ヒント) $P = O + x$ の速度は $\dot{x} = (\omega_1 \times x) + (\omega_2 \times x)$ 。

§3 線形変換

数ベクトル x から数ベクトル y への変換:

$$x \xrightarrow{F} y = F(x) \in \mathbb{R}^n$$

を考える。

定理 6.4: F の変換則が、適当な行列 A によって $F(x) = Ax$ と書けるための必要十分条件は、

- (1) $F(x + y) = F(x) + F(y)$.
- (2) $F(\lambda x) = \lambda F(x)$. ($\lambda \in \mathbb{R}$)

である。(証明略)

定義 6.1: 定理の 2 条件を満足する変換則 $F : x \mapsto y$ を、線形変換 (linear transformation) という。

課題 8 (外積作用素) $a = [a_i] \in \mathbb{R}^3$ を定ベクトルとする。これと $x = [x_i] \in \mathbb{R}^3$ との外積が作る変換則:

$$x \xrightarrow{C} y = C(x) := a \times x$$

が線形変換であることを示せ。この C を外積作用素と呼び、 $C = a^\times$ などと書く。(p5-1 の (O1) を使う)

§4 行列表示

簡単のため $x, y \in \mathbb{R}^3$ で考える。線形変換 $y = F(x)$ の変換則は、定理 6.4 より、適当な 3×3 行列、

$$A = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

によって、 $F(x) = Ax$ と書ける。

課題 9 $x = [x_i]$ に対する $y = [y_i] = F(x)$ の値は、何らかの方法で具体的に計算できるとする。行列 A の成分を推定するには、どんな x を何種類代入すればよいか?

^{a)} それ上の任意の 2 点間の距離が変化しない物体を、剛体 (rigid body) という。

行列の 1 列目は、 \mathbb{R}^3 の基底ベクトル $(1, 0, 0)^T$ を代入すれば判明する。

$$F \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ?_{11} & ?_{12} & ?_{13} \\ ?_{21} & ?_{22} & ?_{23} \\ ?_{31} & ?_{32} & ?_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ?_{11} \\ ?_{21} \\ ?_{31} \end{bmatrix}$$

同様に、第 2、第 3 の基底ベクトルを代入していけば、

$$F \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ?_{12} \\ ?_{22} \\ ?_{32} \end{bmatrix}, F \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ?_{13} \\ ?_{23} \\ ?_{33} \end{bmatrix}$$

のように、全ての成分が判明する。

定義 6.2 (標準基底): $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ を、 \mathbb{R}^n の標準基底と呼ぶ。

定理 6.5 (行列表示): 線形変換 $F(x)$ の変換則は、 $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_n)$ を列ベクトルとする行列

$$A = [(e_1), F(e_2), \dots, F(e_n)]$$

によって、 $F(x) = Ax$ と書ける。 A を、 F の行列表示 (matrix representation) と呼び、 $A = [F]$ と書く。

課題 10 (反対称行列) 外積作用素 $a^\times(x) := a \times x$ の行列表示 $[a^\times]$ を求めよ。

ヒント) 定理 5.3 (p5-1) を復習すると、 $a = [a_i], x = [x_i]$ に対して、

$$a^\times(x) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix}$$

である。このとき、

$$a^\times \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0 \\ a_3 \cdot 1 - a_1 \cdot 0 \\ a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

によって、 $[a^\times]$ の 1 列目が判明する。以下同様に求めよ。

容易に確かめられるように、 $[a^\times]$ を転置すると符号が反転 $[a^\times]^T = -[a^\times]$ するので、外積作用素の行列表示 $[a^\times]$ のことを、反対称行列と略称する文献もある。

課題 11 $R_{a:\theta}(x)$ を定理 6.1 の回転変換とする。

- (1) $R_{a:\theta}$ が線形変換であることを示せ。
- (2) 行列表示 $[R_{a:\theta}]$ を、数式処理ソフトで求めよ。

定義 6.3 (回転行列): 回転変換の行列表示:

$$[R_{a:\theta}] = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_1^2)C_\theta + \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2(1 - C_\theta) - \alpha_3S_\theta & \alpha_1\alpha_3(1 - C_\theta) + \alpha_2S_\theta \\ \alpha_1\alpha_2(1 - C_\theta) + \alpha_3S_\theta & (1 - \alpha_2^2)C_\theta + \alpha_2^2 & \alpha_2\alpha_3(1 - C_\theta) - \alpha_1S_\theta \\ \alpha_1\alpha_3(1 - C_\theta) - \alpha_2S_\theta & \alpha_2\alpha_3(1 - C_\theta) + \alpha_1S_\theta & (1 - \alpha_3^2)C_\theta + \alpha_3^2 \end{bmatrix}$$

を、回転行列という。ただし $S_\theta := \sin \theta$, $C_\theta := \cos \theta$ 。

Multibody Dynamics

(第7回 剛体の運動学)

吉田勝俊

2006年12月15日

§1 剛体のモデル

図形の数学モデルを考える。現代的には、キャンパスを全体集合 A としたときの部分集合 $X \subset A$ として、図形をモデル化する。

- ディスプレイの全画素 \iff 全体集合
- そのなかの輝点の集合 \iff 図形
- 図形が動くこと = 輝点のすり替え。
- 図形の運動 = 部分集合の更新。

この空想においては、図形が動いても、キャンパスの点自体は動かない。代りに図形の構成点が更新されていく。運動によって図形の構成粒子が変化するという空想は、我々の経験的な実感に合わないが、このような「土台とのずれ」というようなものを空想しないかぎり、運動は表現できない。

以上と同様にして、我々の物理空間 A を点集合と見なし、そのなかの物体 \mathcal{X} を、物理空間の部分集合 $\mathcal{X} \subset A$ としてモデル化する。

特に、物体 \mathcal{X} を構成する任意の2点 $P, Q \in \mathcal{X}$ の距離が不変であるような物体を、剛体 (rigid body) という。また、同一空間に共存する N 個の剛体 $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_N \subset A$ を、 N 剛体系 (N rigid bodies) という。

§2 剛体の姿勢

剛体の運動扱うための理論には、少なくとも次の機能を持たせたい。

機能 (1) 剛体の姿勢 (位置と向き) を表現できる。

機能 (2) 剛体の形状 (構成粒子の空間配置) を表現できる。

まず、物理空間 A と測量用の線形空間 V をとる。これらのペア (A, V) を、アファイン空間と呼んだ^{a)}。そこから原点 $O \in A$ と、 V の基底 \mathcal{E} を選んで固定する。これらのペア (O, \mathcal{E}) を、直線座標系または枠と呼んだ^{b)}。

ここで、 N 剛体系の空間的な配置を表現するためのアイデアとして、 $N+1$ 個の枠をとる。

$$\mathcal{F}_0 = (O, \mathcal{E}), \quad \mathcal{F}_i = (X_i, \mathcal{E}_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (7.1)$$

^{a)} 定義 4.5 (p4-1) 参照。

^{b)} 定義 4.8 (p4-2) 参照。

このうちの1つ $\mathcal{F}_0 := (O, \mathcal{E})$ を物理空間 A に固定し (0番は便宜上)、共通の基準と見なす。 \mathcal{F}_0 を基準枠と呼ぶ。残りの $\mathcal{F}_i = (X_i, \mathcal{E}_i)$ は i 番目の剛体に固定し、これら \mathcal{F}_i を物体枠と呼ぶ。

定義 7.1: 以下、枠 \mathcal{F}_k から測った位置ベクトルを、コロン付きで \bullet_k と書く。

i 番目の剛体の姿勢を次のように表示する。

$$\begin{cases} X_i = O \hat{+} x_{0:i}, & \text{(剛体の原点)} \\ \mathcal{E}_i = R_i(\mathcal{E}). & \text{(剛体の回転姿勢)} \end{cases} \quad (7.2)$$

ただし、 $R_i := R_{\alpha_i: \theta_i}$ は回転変換である。基準原点 O から剛体原点 X_i へ至る位置ベクトル x_i によって剛体の位置が表現され、基準基底 \mathcal{E} から剛体基底 \mathcal{E}_i に至る回転変換 R_i によって剛体の向きが表現される。

以上、機能 (1) は、 $x_{0:i}, R_i$ による方法で実現できる。

§3 基準座標と物体座標

同じ点 $P \in A$ を、基準枠 \mathcal{F}_0 と物体枠 \mathcal{F}_i でそれぞれ、

$$\begin{aligned} P \in A &\xrightarrow{\mathcal{F}_0 = (O, \mathcal{E})} \tilde{p}_{0:} \in \mathbb{R}^3 \\ P \in A &\xrightarrow{\mathcal{F}_i = (X_i, R_i(\mathcal{E}))} \tilde{p}_{i:} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

と測るとき、すなわち、

$$\begin{aligned} P &= O \hat{+} p_{0:} = O \hat{+} \varphi_{\mathcal{E}}(p_{0:}) \cdot \vec{\mathcal{E}} = O \hat{+} \tilde{p}_{0:} \cdot \vec{\mathcal{E}} \\ P &= X_i \hat{+} p_{i:} = X_i \hat{+} \varphi_{\mathcal{E}}(p_{i:}) \cdot \vec{\mathcal{E}} = X_i \hat{+} \tilde{p}_{i:} \cdot \vec{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

と測るとき、 \mathcal{F}_0 で測った $\tilde{p}_{0:}$ を基準座標、 \mathcal{F}_i で測った $\tilde{p}_{i:}$ を物体座標という。

両者の関係は、定理 4.4 (p4-2) の枠 (座標系) の変更方法を使うと、(7.2) に注意して、

$$\tilde{p}_{0:} = \varphi_{\mathcal{E}}(x_{0:i}) + [R_i] \tilde{p}_{i:} \quad (7.3)$$

というアファイン変換で書ける。

ここでいう物体座標は、物体がロボットならロボット座標、航空機の機体なら機体座標と呼ばれる。基準座標はワールド座標とも呼ばれる。

(7.3) の使い道を、 N 台のロボットがある対象 $P \in A$ を探査する状況に例えて示そう。次の仮定をおく。

- 基地にワールド座標系 $\mathcal{F}_0 = (O, \mathcal{E})$ を設置する。

- 各ロボットにロボット座標系 $\mathcal{F}_i = (O \hat{+} x_{0:i}, R_i(\mathcal{E}))$ を設置する .
- 各ロボットの位置 $x_{0:i}$ と向き R_i は, 常に計測可能 .

基地 \mathcal{F}_0 からみたある対象 P をワールド座標 \tilde{p}_0 . ($P = O \hat{+} \tilde{p}_0 \cdot \tilde{\mathcal{E}}$) が未知の状況を考える . 探査を開始したところ, i 番目の探査ロボット \mathcal{F}_i が P を発見し, \mathcal{F}_i から見た P のロボット座標 \tilde{p}_i が明らかになったとする . ロボット座標 \tilde{p}_i を受信した基地 \mathcal{F}_0 は, (7.3) によって, P のワールド座標 $\tilde{p}_0 = \varphi_{\mathcal{E}}(x_{0:i}) + [R_i] \tilde{p}_i$ を特定することができる .

§4 剛体の形状

次に機能 (2) を実現する . 剛体上の点 $P_i \in \mathcal{X}_i$ を, 同じ剛体の物体枠 $\mathcal{F}_i = (X_i, \mathcal{E}_i)$ で座標表示したものは,

$$\tilde{x}_{i:i} := \varphi_{\mathcal{E}_i}(x_{i:i}), \quad P_i = X_i \hat{+} x_{i:i} \quad (7.4)$$

と書ける .

定義 7.2 (局所座標): このような, 自分自身の点を自分の枠で測った物体座標 $\tilde{x}_{i:i} \in \mathbb{R}^3$ を, 特に本書では局所座標 (local coordinate) と呼ぼう^{c)} .

定理 7.1: 変形しない剛体の局所座標 $\tilde{x}_{i:i} \in \mathbb{R}^3$ は, 常に定ベクトルとなる .

すなわち, 剛体上のある 1 点を指す局所座標は, 剛体の運動状態とは無関係に, 常にその点を指し続ける .

このような局所座標の性質を利用すれば, 剛体の形状 (構成粒子の配置) を定ベクトルとして保持できる . したがって, 剛体の形状を表わす数値としては, 局所座標が最も便利である . こうして機能 (2) が実現される .

ここでは, 運動学の最も標準的な手続きに準じて, 剛体を空間の部分集合としてモデル化したが, そこには, 剛体の構成粒子が運動によって更新されるという不自然さがあった . 局所座標に着目すれば, 物理的な構成粒子の一体感も自然に回復する .

§5 同次変換

(7.3) を, 成分が見えるように書くと,

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ r_i \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

のような格好をしている . 若干トUNCHを効かすと, 同じ変換則は,

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & x_i \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & y_i \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ r_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

のように書くことができる (上 3 行に着目せよ) . 第 4 成分の “1” は, このような算法上のトリックを実現するためのダミー成分であり, 物理的な意味はない .

この画期的なトリックにより, 回転してから平行移動するアファイン変換則 (7.5) を, 4×4 の行列 1 個で,

$$H = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & x_i \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & y_i \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

のように一発表記できる . 行列 H を同次変換行列^{d)} といひ, それによる変換式 (7.6) を同次変換という .

3 次元 CG やロボット工学の分野では, 次の行列を組み合わせて, 物体の姿勢を表わすことが多い . これらは同次変換行列 (7.7) のごく特殊なケースに過ぎないが, 3D の業界標準なので知っていて損はない .

$$T(x, y, z) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{平行移動} \quad (7.8)$$

$$\mathcal{R}_x(\theta) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta & 0 \\ 0 & S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x \text{ 軸まわ} \\ \text{りの回転} \end{array} \quad (7.9)$$

$$\mathcal{R}_y(\theta) := \begin{bmatrix} S_\theta & 0 & C_\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ C_\theta & 0 & -S_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} y \text{ 軸まわ} \\ \text{りの回転} \end{array} \quad (7.10)$$

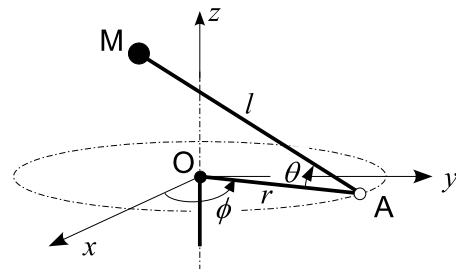
$$\mathcal{R}_z(\theta) := \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} z \text{ 軸まわ} \\ \text{りの回転} \end{array} \quad (7.11)$$

$$S(\alpha, \beta, \gamma) := \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{拡大縮小} \quad (7.12)$$

ただし, $C_\theta := \cos \theta$, $S_\theta := \sin \theta$.

課題 12 定義 6.3 (p6-2) に, 例えば $a = e_2 = (0, 1, 0)$ を代入して実際に $R_{e_2: \theta}$ を求め, (7.10) の成分を確かめよ .

課題 13 図のリンクが (ϕ, θ) の姿勢にあるとき, 点 M の基準座標を, 変換 (7.8) ~ (7.12) の組み合わせで書き下せ .



(答: $R_z(\phi)T(r, 0, 0)R_y(\theta)T(-l, 0, 0)[0, 0, 0]^T$)

^{c)} 一般的な用語の使い方は言えないので, 他書を読む場合には注意されたい .

^{d)} または Dehavit-Hartenberg の変換行列ともいう .

Multibody Dynamics

(第8回 ロボット機構学)

吉田勝俊

2006年12月15日

§1 機構の数式表現

我々の仮想空間にあと何を足せば、機械の機構を文字情報化できるだろうか？— 結論からいうと、機構は、拘束条件を表わす代数方程式として、文字情報化される。

人間の下肢は、近似的に、もも、すね、足からなる3剛体系と見なせるが、3つの剛体を全く自由に空間に浮べたものもまた3剛体系である。違いは拘束条件にある。剛体の構成点の配置に関する制約条件のこと、一般に拘束条件 (constraints) という。例えば、ある剛体の1点 $X_k \in \mathcal{X}_k$ を別の剛体の1点 $X_l \in \mathcal{X}_l$ に拘束するとリンク機構が実現する。あるいは、剛体2点 $P_k, Q_k \in \mathcal{X}_k$ を適当な直線上に拘束すれば直線運動機構が実現する。

表記短縮のため2次元で説明する。2次元のアフィン変換は、 z 軸回転を z 軸方向から眺めることによって、

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta \\ S_\theta & C_\theta \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

または、

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H := \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta & x_i \\ S_\theta & C_\theta & y_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

と書ける。ただし、基準枠 (O, \mathcal{E}) に対して、 i 番目の剛体枠を $(O \hat{+} x_i, R(\mathcal{E}))$ 、 $x_i := (x_i, y_i)^T$ ととり、 i 番目の剛体上の点 $P \in \mathcal{X}_i$ の局所座標を $p_i = (p_i, q_i)$ 、基準座標を $p_0 = (p_0, q_0)$ と書いた。

表記短縮のため、 N 剛体系の各剛体の位置 x_i, y_i と姿勢角 θ_i を並べた数ベクトル：

$$\mathbf{q} = [q_i] := (x_1, y_1, \theta_1, x_2, \dots, x_N, y_N, \theta_N) \in \mathbb{R}^n$$

を導入する ($n = 3N$)。このような単なる算法上の多次元ベクトルを、一般化座標という。一般化座標 \mathbf{q} を1つ指定すると、 N 個全ての剛体の姿勢が定まる (便利)。

多くの場合、拘束条件は一般化座標を未知数とする m 連立代数方程式：

$$\Phi(\mathbf{q}, t) \equiv \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{q}, t) \\ \phi_2(\mathbf{q}, t) \\ \vdots \\ \phi_m(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^m} \quad (8.3)$$

として書ける^{a)}。必要な方程式の本数 m は、どのような機構かによる。

$m = n$ のときは、全ての未知数 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ が決まるから、直ちに剛体系の姿勢が判明する。このような、拘束条件に基づく運動解析法を運動学 (kinematics) と呼ぶ。 $m < n$ のときは、ニュートンの運動方程式を追加しないと未知数が定まらないが、このような解析法を動力学 (dynamics) という。

一般化座標のいくつか外部入力 $\alpha(t), \beta(t), \dots$ に支配されていて、もはや未知数でないことがある。ようするに、強制的に、

$$q_k = \alpha(t), \quad q_l = \beta(t), \quad \dots$$

と書いてしまうことがある。このような状況でも、

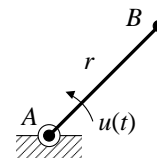
$$q_k - \alpha(t) = 0, \quad q_l - \beta(t) = 0, \quad \dots$$

を拘束条件と見れば、(8.3) の形式で表記できる。

$$\Phi(\mathbf{q}, t) \equiv \begin{bmatrix} \vdots \\ q_k - \alpha(t) \\ q_l - \beta(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^m}$$

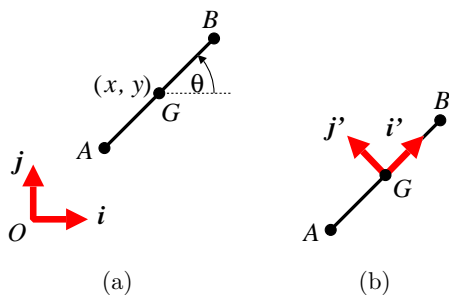
このような外部入力による自明な拘束を、駆動拘束 (driving constraints) という。古典的な機構学でいう機構の自由度とは、(運動学の範囲で運動が求まるのに必要な) 駆動拘束の個数のことである。

例5 (剛体棒の旋回): 角度 $u(t)$ の回転入力を受けて A 点を中心に旋回する、次のような長さ r の剛体棒を考える。棒の端点 B 点の運動を求めよ。



解答例を示す。(a) 基準枠 $\mathcal{F}_0 = (O, \langle i, j \rangle)$ を取り、剛体棒の重心の基準座標 $x_0 = (x, y)^T$ と姿勢角 θ をとる。

^{a)} そう書けないものを非ホロノーム拘束 (nonholonomic constraints) という。例えば、座標の時間微分に課されるような拘束が非ホロノーム拘束である。



(b) 次に、剛体棒に剛体棒 $\mathcal{F}_G = (G, \langle i', j' \rangle)$ を固定し、剛体上の A, B 点を \mathcal{F}_G から測った局所座標で、 $\mathbf{a}_G = (-\frac{r}{2}, 0)^T$, $\mathbf{b}_G = (\frac{r}{2}, 0)^T$ と表わす。アフィン変換 (8.2) で基準座標に変換すると、

$$\mathbf{a}_0 = H\mathbf{a}_G = \begin{bmatrix} x - \frac{r}{2}C_\theta \\ y - \frac{r}{2}S_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_0 = H\mathbf{b}_G = \begin{bmatrix} x + \frac{r}{2}C_\theta \\ y + \frac{r}{2}S_\theta \end{bmatrix}.$$

ここで、 A 点を基準棒の原点に拘束して、拘束条件の 1 つ $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ を得る。さらに、回転角 θ は回転入力 $u(t)$ に支配されているので、駆動拘束 $\theta = u(t)$ がもう 1 つの拘束条件になる。すなわち、拘束条件は

$$\Phi(x, y, \theta, t) \equiv \begin{bmatrix} x - \frac{r}{2} \cos \theta \\ y - \frac{r}{2} \sin \theta \\ \theta - u(t) \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

となる。未知数 x, y, θ に対して、互いに独立な代数方程式が 3 つ存在するので、運動学の範囲で解ける。重心と回転の運動: $(x, y, \theta)^T = (\frac{r}{2} \cos \theta, \frac{r}{2} \sin \theta, u(t))^T$ を得る。これを \mathbf{b}_0 に代入して、 B 点の運動 $\mathbf{b}_0(t) = r(\cos u(t), \sin u(t))$ を得る。

課題 14 A 点の代わりに B 点を原点に固定したときの運動を求めよ。

§2 常微分と偏微分の復習

常微分 d/dt は「全てを代入し終えてからの微分」、偏微分 $\partial/\partial t$ は「代入前の字面だけ見た微分」と理解しよう。ようするに、一般に、

$$\frac{d}{dx} f(x, y, \dots) \neq \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \dots)$$

である。

具体例を挙げる。仮に $x = t^2, y = t$ とする。

$$\begin{aligned} \frac{d(xy^2t)}{dt} &= \frac{d(t^5)}{dt} = 5t^4 \\ \frac{\partial(xy^2t)}{\partial x} &= y^2t = t^3 \\ \frac{\partial(xy^2t)}{\partial y} &= x(2y)t = 2t^4 \\ \frac{\partial(xy^2t)}{\partial t} &= xy^2 = t^4 \neq \frac{d(xy^2t)}{dt} \end{aligned}$$

d/dt と $\partial/\partial t$ の関係は、公式：

$$\frac{d}{dt} \phi(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

によって結ばれる。実際 $\phi = xy^2t$ に対して、

$$\frac{d}{dt}(xy^2t) = (t^3)(2t) + (2t^4)(1) + \underbrace{(t^4)}_{\frac{\partial}{\partial t}(xy^2t)} = 5t^4$$

である。一般に、

$$\frac{d}{dt} \phi(q_1, \dots, q_n, t) = \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

が成立する。

§3 ヤコビ行列

同様に、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \phi_1(\mathbf{q}, t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \phi_m(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \phi_1(q_1, \dots, q_n, t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \phi_m(q_1, \dots, q_n, t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \phi_1}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに、 (i, j) 要素が $\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}$ であるような行列を $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right]$ と表記すれば、拘束条件の時間微分は、

$$\frac{d}{dt} \Phi = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right] \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (8.4)$$

と書ける。 $m \times n$ 行列 $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right]$ をヤコビ行列という。

§4 速度解析

拘束条件 $\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$ の未知数 \mathbf{q} を、手計算で解くのは無理だが、数値解 $\mathbf{q}(t)$ は得られたとする。この状況で機構の速度 $\dot{\mathbf{q}}(t)$ を知りたいときは、 $\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$ より $\frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$ を (8.4) に代入して公式、

$$\mathbf{0} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right] \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \implies \frac{d\mathbf{q}}{dt} = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (8.5)$$

を作り、これに数値解 $\mathbf{q}(t)$ を代入すればよい。公式 (8.5) を速度方程式という。同様にして、加速度は $\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$ を 2 回時間微分して作った公式に、速度方程式を併用して求める。

Multibody Dynamics

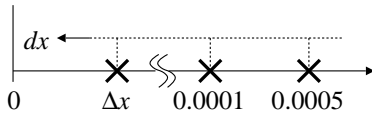
(第9回 時間微分と慣性枠)

吉田勝俊

2006年12月22日

§1 無限小

小さくないと文句を言われたら，相手が納得するまで自動的に小さくなる変数を微分または無限小といい， d を冠して dt, dx, dy などと表わす．自動的に小さくならない通常の微小量は $\Delta t, \Delta x, \Delta y$ と書いて区別する．

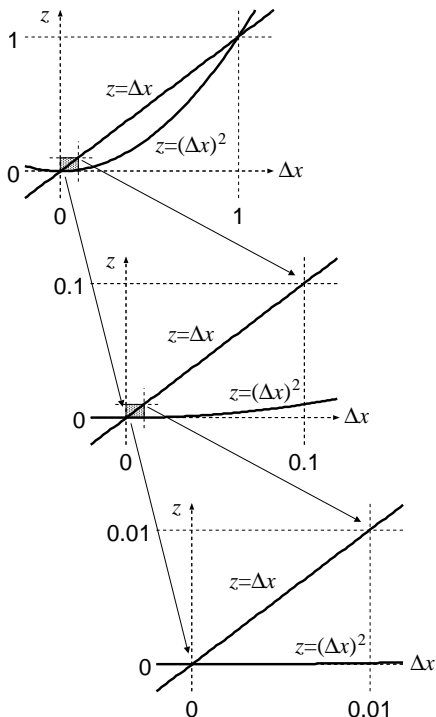


次の算法を要請する．

公理 5 (無限小): $dx, dy \neq 0$ を基準長さとする無限小世界においては， $(dx)^2 = (dy)^2 = dx dy = 0$ ．

dx が無限小なら $(dx)^2$ も無限小であり，片方が $dx \neq 0$ なのに，もう片方を $(dx)^2 = 0$ とするルールは承服しがたいかも知れない．これは次のように考える．

Δx を微小量とする．1次関数 $z = (\Delta x)$ と2次関数 $z = (\Delta x)^2$ の原点付近を拡大していく．



1次関数 $z = (\Delta x)$ のグラフは変化しないが，2次関数 $z = (\Delta x)^2$ は猛スピードで定値関数 $y = 0$ に近づく．ここで，微小量 Δx を微分 dx に置き換えると，1次関数はそのまま $z = dx$ だが，2次関数は定値関数 $z = (dx)^2 = 0$ と見なせる．なぜなら，その程度の dx では定値関数に見えないと言われたら，そう見えるまでどんどん小さくできる約束である．同様に，曲面 $z = (\Delta x)(\Delta y)$ は猛スピードで平面 $z = 0$ に近づくから， $dx dy = 0$ である．以上，公理 5 は我々の世界と整合する．

§2 変数の時間微分

時間 t に依存する変数 $x(t)$ を考える．独立変数 t の微分 dt をとり，幅 dt によって定まる高さ，

$$dx := x(t + dt) - x(t)$$

を従属変数 x の微分という．こうして，幅 dt ，高さ dx の小さな窓が作られる．

ここで幅 dt を小さくしながら，縮小する窓の中を観察する．窓の中の $x(t)$ のグラフが窓の対角線に漸近するとき， $x(t)$ は t で微分可能または滑らかであるという．

窓の左下 $(t, x(t))$ を改めて原点と見なせば，対角線はよく知られた “ $y = ax$ ” の形式で，

$$dx = K dt \quad (K \in \mathbb{R} \text{ は定数})$$

と書ける．係数 K を， $x(t)$ の t に関する微分係数，または $x(t)$ の速度という．現代的には， K を $\frac{dx}{dt}$ または \dot{x} などと表記し，その値を極限操作：

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = K := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

によって定める．

§3 幾何ベクトルの時間微分

以上をそっくりまねて，独立変数 $t \in \mathbb{R}$ に依存する幾何ベクトル $x(t) \in V$ の微分を，次のように定める．

$$dx := x(t + dt) - x(t) \quad (9.1)$$

ここで，適当な定ベクトル \dot{x} が見つかって，

$$dx = \dot{x} dt \quad (\dot{x} \in V \text{ は定ベクトル}) \quad (9.2)$$

と書けるとき, x は t で微分可能または滑らかであるという^{a)}. 微分係数に相当する $\dot{x} \in V$ を, $x(t)$ の速度ベクトルまたは単に速度という. その意味するところは,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x(t+h) - x(t)) \quad (9.3)$$

としてとらえる.

自明な性質として, 定ベクトル $x(t) = a$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) の微分はゼロになる.

$$da := a - a = \mathbb{O}_V \quad \text{ゆえに} \quad \frac{da}{dt} = \mathbb{O}_V \quad (9.4)$$

さらに, 式 (9.1) と次式は同値である.

$$x(t+dt) = x(t) + dx(t) \quad (9.5)$$

また, $d(x+y) = (x+dx) + (y+dy) - (x+y) = dx+dy$ より加法が保存する^{b)}.

$$\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}. \quad (9.6)$$

定理 9.1 (ライプニッツ則): 滑らかな $\alpha(t) \in \mathbb{R}$, $x(t)$, $y(t) \in V$ について, 全ての積 (1) ~ (3) で, ライプニッツ則 $(xy)' = x'y + xy'$ が成立する.

- (1) スカラー倍: $\frac{d}{dt}(\alpha(t)x(t)) = \dot{\alpha}(t)x(t) + \alpha(t)\dot{x}(t)$.
特に, 定ベクトル x_0 では $\frac{d}{dt}(\alpha(t)x_0) = \dot{\alpha}(t)x_0$.
- (2) 内積: $\frac{d}{dt}(x(t) \cdot y(t)) = \dot{x}(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot \dot{y}(t)$.
- (3) 外積: $\frac{d}{dt}(x(t) \times y(t)) = \dot{x}(t) \times y(t) + x(t) \times \dot{y}(t)$.

例えば, (1) のスカラー倍を証明すると,

$$\begin{aligned} d(\alpha x) &:= \alpha(t+dt)x(t+dt) - \alpha(t)x(t) \quad (9.1) \\ &= (\alpha + d\alpha)(x + dx) - \alpha x \quad (9.5) \\ &= (d\alpha)x + \alpha(dx) + (d\alpha)(dx) \quad V \text{ の分配則} \\ &= (\dot{\alpha}dt)x + \alpha(\dot{x}dt) + (\dot{\alpha}dt)(\dot{x}dt) \quad (9.2) \\ &= (\dot{\alpha}x + \alpha\dot{x})dt + (\dot{\alpha}\dot{x})dt^2 \quad V \text{ のスカラー倍} \\ &= (\dot{\alpha}x + \alpha\dot{x})dt \quad \because dt^2 = 0 \quad \text{公理 5 (p9-1)} \end{aligned}$$

ゆえに, 線形関係 $d(\alpha x) = \boxed{\dot{\alpha}x}dt$ において $\boxed{\dot{\alpha}x} = \dot{\alpha}x + \alpha\dot{x}$ となるから題意を得る. 定ベクトル x_0 については, (9.4) より $\dot{x}_0 = \mathbb{O}_V$ ゆえ明らか.

以上の証明手順は, 分配則を持つ全ての積について共通である. (1) の証明では, 加法とスカラー倍の分配則 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ を用いたが, 代わりに内積の分配則 (= 双線形性の特別な場合):

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

を使えば定理の (2) が示せる. 同様に, 外積の分配則

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z, \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

から定理の (3) が示される.

^{a)} $dt \dot{x}$ と書くべきスカラー倍を $\dot{x} dt$ と書いた.

^{b)} 加法の変換 $T(a+b)$ と, 変換したものの加法 $T(a)+T(b)$ が等しいとき, 変換 T において加法 + が保存するという.

§4 座標ベクトルの微分

$\mathcal{E} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ を V の基底とする. 座標写像を短かく $\varphi_{\mathcal{E}}(\bullet) = \tilde{\bullet}$ と表記する.

もっとも一般的な状況として, 基底 \mathcal{E} も座標 \tilde{x} も時変 (time-varying):

$$\tilde{x}(t) = [x_i(t)], \quad \mathcal{E}(t) = \langle u_1(t), u_2(t), u_3(t) \rangle$$

である場合を考えると,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 x_i(t) u_i(t) \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (x_i(t) u_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i(t) u_i(t) + x_i(t) \dot{u}_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) u_i(t) + \sum_{i=1}^3 x_i(t) \dot{u}_i(t) \\ &= \dot{\tilde{x}}(t) \cdot \vec{\mathcal{E}}(t) + \tilde{x}(t) \cdot \dot{\vec{\mathcal{E}}}(t) \end{aligned}$$

と計算できる. \mathcal{E} で両辺の座標をとると,

$$\begin{aligned} \tilde{\dot{x}} &= \varphi_{\mathcal{E}}(\dot{x}) = \varphi_{\mathcal{E}}(\dot{\tilde{x}} \cdot \vec{\mathcal{E}}(t) + \tilde{x} \cdot \dot{\vec{\mathcal{E}}}(t)) \\ &= \varphi_{\mathcal{E}}(\dot{\tilde{x}} \cdot \vec{\mathcal{E}}(t)) + \varphi_{\mathcal{E}}(\tilde{x} \cdot \dot{\vec{\mathcal{E}}}(t)) \\ &= \dot{\tilde{x}} + \varphi_{\mathcal{E}}(\tilde{x} \cdot \dot{\vec{\mathcal{E}}}(t)) \end{aligned}$$

である.

命題 9.2 (交換可能性): 次の 2 条件は同値.

- (1) 基底 \mathcal{E} は時不変.
- (2) $\frac{d}{dt}$ と $\varphi_{\mathcal{E}}$ は交換可能. すなわち,

$$\varphi_{\mathcal{E}} \left(\frac{d}{dt} x \right) = \frac{d}{dt} \varphi_{\mathcal{E}}(x) \quad (\text{or } \tilde{\dot{x}} = \dot{\tilde{x}}) \quad (9.7)$$

ゆえに, 時変なら一般には交換不可能.

以上, 幾何ベクトルの微分と, 座標ベクトルの微分は一般には一致しない. 両者を混同すると, 慣性枠の言わんとしているところが掴めない.

§5 慣性枠

定義 9.1 (運動, 速度, 加速度): 基準枠 $\mathcal{F} = (O, \mathcal{E})$ をとり, 時刻 t の質点の位置を $X = O \hat{+} x(t)$ と測る. $x(t) \in V$ を質点の運動, $\dot{x}(t) \in V$ を質点の速度, $\ddot{x}(t) \in V$ を質点の加速度という.

定義 9.2 (測定値): 運動の座標 $\tilde{x}(t) = \varphi_{\mathcal{E}}(x(t))$ を, 運動の測定値と呼ぶ. これの算術的な時間微分:

$$\dot{\tilde{x}}(t) := [\dot{x}_i(t)], \quad \ddot{\tilde{x}}(t) := [\ddot{x}_i(t)]$$

を, それぞれ速度, 加速度の測定値と呼ぶ.

※ 数ベクトル $\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}}, \tilde{F} \in \mathbb{R}^3$ のほうは物理的に測定可能だが, 幾何ベクトル $x, \dot{x}, \ddot{x}, F \in V$ は測定不可能.

公理 6 (ニュートンの運動法則): 経験的に次の 3 法則が成立する [1, 2].

- 第 1 法則 (慣性): 力を受けない質点は, 静止したままか, 等速直線運動をする.
- 第 2 法則 (運動方程式): 力 F を受ける質量 m の質点の運動の測定値 \tilde{x} について,

$$m\ddot{\tilde{x}} = \tilde{F}. \quad (\tilde{F} = \varphi_{\mathcal{E}}(F))$$
- 第 3 法則 (作用・反作用): 質点 A が質点 B に力 G を及ぼすとき, 質点 B は質点 A に力 $-G$ を及ぼす. G と $-G$ は逆向きで同一直線上にある.

定義 9.3 (慣性枠): 運動の測定値 $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ が, 第 2 法則 $m\ddot{\tilde{x}} = \tilde{F}$ を満足するような特別な枠 \mathcal{F} を慣性枠 (inertial frame) という.

※ 現実には $m\ddot{\tilde{x}} \neq \tilde{F}$ となる場合が圧倒的に多い. 例えば一般の物体枠においては, ニュートンの運動法則は, まずもって成立しない.

定義 9.4 (静止枠): 次の 2 条件を満足する $\mathcal{F}_0 = (O, \mathcal{E})$ を, 本書では静止枠 (stationary frame) と呼ぶ.

- (1) O で測った質点 $X = O \hat{+} x$ について, $m\ddot{x} = F$ が成立する.
- (2) 基底 $\mathcal{E} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ が時不変^{c)}.

※ この定義は原点の運動について何も述べてないので, ここでいう静止枠が実際に「静止」しているとは限らない. 慣性枠と関連づけやすいので, 便宜上この定義を採用する.

定理 9.3: \mathcal{F}_0 が静止枠 $\implies \mathcal{F}_0$ は慣性枠.

慣性枠の使い方として最も典型的には, 基準枠として慣性枠を選ぶ. こうしておけば, 基準座標では常に第 2 法則 $m\ddot{x} = F$ が成立し, それを根拠に運動方程式が立てられる. 個別の物体枠が慣性枠である必要はない. 回転運動しようが加速運動しようが構わない.

§6 慣性枠の実例

$\mathcal{F}_0 = (O, \mathcal{E})$ を静止枠とする.

定理 9.4 (第 2 法則を保つ枠): 次の枠 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ では第 2 法則が成立する.

- $\mathcal{F}_1 = (O \hat{+} r, \mathcal{E})$, $r \in V$ は定ベクトル. (空間原点の変更)
- $\mathcal{F}_2 = (O, R_{\theta}(\mathcal{E}))$, $R_{\theta} \in \mathcal{L}(V, V)$ は長さや角度を保つ回転変換. (基底の静的な回転)
- $\mathcal{F}_3 = (O \hat{+} tv, \mathcal{E})$, $v \in V$ は定ベクトル. (原点の等速直線運動)

すなわち枠 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ は全て慣性枠である.

^{c)} 時間に依存しないの意.

定理 9.5 (第 2 法則が破れる枠): 次の枠 $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ においては第 2 法則は成立しない.

- $\mathcal{F}_4 = (O, R_{\omega t}(\mathcal{E}))$. (基底の定速回転)
- $\mathcal{F}_5 = (O \hat{+} (t^2/2)a, \mathcal{E})$, $a \neq \mathbb{0}_V$ は定ベクトル. (原点の加速運動)

すなわち $\mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5$ は, いずれも慣性枠ではない.

例 6 (空間原点の変更): $\mathcal{F}_1 = (O \hat{+} r, \mathcal{E})$ が慣性枠であることを示せ.

手本) 質点 $X \in \mathcal{A}$ は, $\mathcal{F} = (O, \mathcal{E})$ と $\mathcal{F}_1 = (O \hat{+} r, \mathcal{E})$ によって, それぞれ,

$$X = O \hat{+} x, \quad X = (O \hat{+} r) \hat{+} x' = O \hat{+} (r + x')$$

と書けるから, $x = r + x'$ が成立する. 仮定より $m\ddot{x} = F$ が成立する. このとき,

$$x' = x - r \implies \dot{x}' = \dot{x} \implies m\ddot{x}' = m\ddot{x} = F$$

より, $m\ddot{x}' = F$ が成立し, \mathcal{F}_1 の基底 \mathcal{E} は時不変だから, \mathcal{F}_1 もまた 1 つの静止フレームとなる. ならば定理 9.3 (p9-3) より, \mathcal{F}_1 は 1 つの慣性枠である. 以上, 静止フレームを (静的に) 平行移動したフレームでは第 2 法則が成立する^{d)}.

例 7 (基底の定速回転): $\mathcal{F}_4 = (O, R_{\omega t}(\mathcal{E}))$ が慣性枠でないことを示せ.

手本) $\mathcal{F}_4 = (O, R_{\omega t}(\mathcal{E}))$ の測定値 $\tilde{x}' = \varphi_{R_{\omega t}(\mathcal{E})}(x)$ と $\tilde{F}' = \varphi_{R_{\omega t}(\mathcal{E})}(F)$ について, 第 2 法則 $m\ddot{\tilde{x}}' = \tilde{F}'$ が破れることを示せばよい. 原点 O は共通だから, 位置ベクトル $x \in V$ は共通である.

$$\begin{aligned} x &= \varphi_{\mathcal{E}}(x) \cdot \tilde{\mathcal{E}} = \varphi_{R_{\omega t}^{-1}R_{\omega t}(\mathcal{E})}(x) \cdot \tilde{\mathcal{E}} \\ &= ([R_{\omega t}] \varphi_{R_{\omega t}(\mathcal{E})}(x)) \cdot \tilde{\mathcal{E}} = ([R_{\omega t}] \tilde{x}') \cdot \tilde{\mathcal{E}} \\ \implies \dot{x} &= ([\dot{R}_{\omega t}] \tilde{x}' + [R_{\omega t}] \dot{\tilde{x}}') \cdot \tilde{\mathcal{E}} \\ \implies \ddot{x} &= ([\ddot{R}_{\omega t}] \tilde{x}' + 2[\dot{R}_{\omega t}] \dot{\tilde{x}}' + [R_{\omega t}] \ddot{\tilde{x}}') \cdot \tilde{\mathcal{E}} \\ &= (1/m)F = (1/m)\tilde{F} \cdot \tilde{\mathcal{E}} \\ \implies [\ddot{R}_{\omega t}] \tilde{x}' + 2[\dot{R}_{\omega t}] \dot{\tilde{x}}' + [R_{\omega t}] \ddot{\tilde{x}}' &= (1/m)\tilde{F}. \end{aligned}$$

ここで, $[R_{\omega t}]^{-1}\tilde{F} = \varphi_{R_{\omega t}(\mathcal{E})}(F) = \tilde{F}'$ と, 逆回転 $[R_{\omega t}]^{-1} = [R_{-\omega t}]$ に注意すると,

$$\begin{aligned} m\ddot{\tilde{x}}' &= \tilde{F}' - m[R_{-\omega t}][\ddot{R}_{\omega t}] \tilde{x}' - 2m[R_{-\omega t}][\dot{R}_{\omega t}] \dot{\tilde{x}}' \\ &\text{を得る. したがって, } \tilde{F}_1 := -m[R_{-\omega t}][\ddot{R}_{\omega t}] \tilde{x}', \\ \tilde{F}_2 &:= -2m[R_{-\omega t}][\dot{R}_{\omega t}] \dot{\tilde{x}}' \text{ とおくと, 定速回転する} \\ &\text{フレーム } \mathcal{F}_4 \text{ での測定値 } \tilde{x}' \text{ は, 運動方程式} \\ m\ddot{\tilde{x}}' &= \tilde{F}' + \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 \neq \tilde{F}' \end{aligned}$$

を満足することが分かる. したがって, 定速回転する \mathcal{F}_4 で定まる左辺の測定値 $m\ddot{\tilde{x}}'$ は, 質点が受ける力 \tilde{F}' に一致しない. 以上, 定速回転するフレームでは第 2 法則は成立しない.

^{d)} このような性質を等質性という.

Multibody Dynamics

(第10回 運動量と重心速度)

吉田勝俊

2007年1月16日

多数の質点の運動を一括して調べる方法を開発する．
総和による消去が基本となる．

§1 質点系

N 個の質点の集合 $\{X_k\}_{k=1}^N := \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ を N 質点系という．静止フレーム $\mathcal{F} = (O, \mathcal{E})$ を導入し，各質点の配置を $X_k = O \hat{+} x_k$ と測る．各質量を $m_k \in \mathbb{R}$ とする．

質点 X_i が質点 X_j に及ぼす力 F_{ij} ($i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N$) を考え，全てリストアップ $\{F_{ij}\}_{i,j=1}^N$ しておく^{a)}． i, j の全ての組み合わせを考えるから，総数は N^2 個である．このような N 質点系の内部で発生する力 F_{ij} を，内力 (internal force) と呼ぶ．内力を受ける質点 X_k の運動方程式は

$$m_k \ddot{x}_k = \sum_{i=1}^N F_{ik} \quad (k = 1, \dots, N)$$

となる．内力以外の力を，外力 (external force) と呼ぶ．各質点を受ける外力を F_k とすると，運動方程式は

$$m_k \ddot{x}_k = F_k + \sum_{i=1}^N F_{ik} \quad (k = 1, \dots, N) \quad (10.1a)$$

となる．これで各質点 X_k が受ける力は全て網羅された．(10.1a) を， N 質点系の運動方程式という．

内力か外力かは発生要因では判別できない．例えば図3のように，同じくばねの復元力でも，質点系に自己完結していれば内力，さもなければ外力になる．

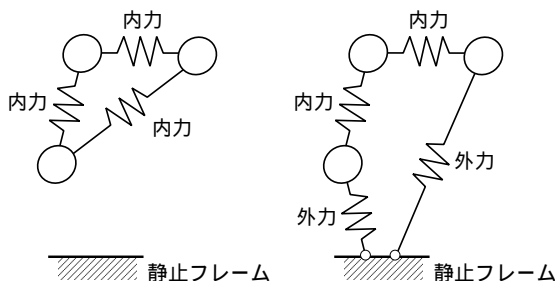


図3 外力と内力

^{a)} 及ぼし合う力が無いときは，例えば $F_{(3)(11)} = \mathbf{0}_V$ のように，後で余分な力を $\mathbf{0}_V$ におく．

§2 総和と消去

(10.1a) の両辺の基準座標をとり，数値解を求めるなどすれば， N 質点系の運動が判明するが， N が大きいと運動の特徴が見えにくい．例えば100 質点系なら300 個の座標成分が時々刻々と吐き出されてしまい，多数の質点が右往左往する光景を，茫漠と眺めているのと大差ない．そこで力学の常套手段として， N 質点系の運動を，

- 重心運動
- 重心まわりの角運動

の2つに集約する．その手順は概してワンパターンで，

- 総和して，相殺・消去する．

の繰り返しである．

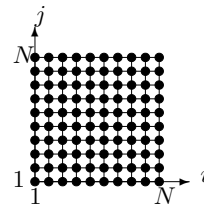
手始めに， N 本ある (10.1a) を両辺で総和すると，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i &= \sum_{i=1}^N \left(F_i + \sum_{j=1}^N F_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N F_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{ij} \end{aligned} \quad (10.2)$$

である．これらの \sum を縮約する方法を見つけていく．

§3 内力の消去

そのための準備を1つ．2重和 $S = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{ij}$ とは， $N \times N$ 格子：



の全ての格子点 $(i, j) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots$ に渡る F_{ij} の和である．全ての (i, j) を1回ずつ巡れば，どんな巡り方でも S は同じだから，同じ S を図4のように3分割して書くことができる．この事実を

$$S = \sum_{i=j} F_{ij} + \sum_{i>j} F_{ij} + \sum_{i<j} F_{ij} \quad (10.3)$$

と表記しておく．

以上を踏まえて，次の補題が成立する．

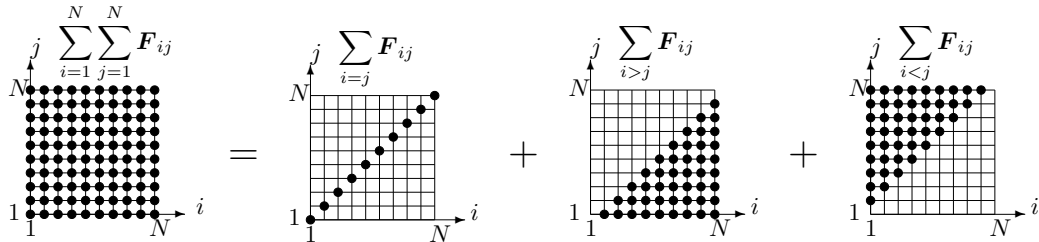


図4 2重和の分解

補題 10.1: N 質点系の内力 F_{ij} について,

- (1) $F_{ij} = -F_{ji}$. ゆえに $F_{ii} = \mathbf{0}_V$. (添字の歪対称性)
 (2) したがって, $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{ij} = \mathbf{0}_V$ が成立する.

課題 15 補題 10.1 を示せ.

ヒント) (1) は第 3 法則 (p9-3). (2) は 2 重和の 3 分割.

以上, 補題 10.1 によって内力の総和が相殺され, (10.2) の右辺が, 次のように簡略化される.

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \mathbf{0}_V = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i =: \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (10.4a) \end{aligned}$$

ただし, \mathbf{F}_{ext} は N 質点系に作用する外力の総和である.

§4 運動量

続いて, 式 (10.2) の左辺を簡略化する.

定義 10.1 (運動量): $\mathbf{p}_i := m_i \dot{\mathbf{x}}_i \in V$ を, 質点 X_i の運動量 (momentum) という. 総和 $\mathbf{P} := \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$ を, N 質点系の全運動量 (total ...) という.

※ \mathbf{P} は測定原点 O の選び方に依存する.

運動量 \mathbf{p}_k を使うと, 運動方程式 (10.1a) は, 簡潔に,

$$\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ik} \quad (k = 1, \dots, N) \quad (10.1b)$$

と書ける. また, 総和した運動方程式 (10.2) の左辺は,

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i) \quad m_i \text{ は定数} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \right) \cdot \quad \text{微分の和} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \right) \cdot = \dot{\mathbf{P}} \quad \text{定義 10.1} \quad (10.4b) \end{aligned}$$

のように全運動量で書けるので, したがって,

定理 10.2 (運動量の法則): 全運動量 \mathbf{P} の時間微分は, 外力の総和 $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$ に等しい. すなわち,

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (10.5)$$

である. ゆえに, $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ なら全運動量は保存する^{b)}.

以上, N 質点系が全体として示す性質を, 単独のベクトル方程式 (10.5) で表わすことに成功した.

§5 重心運動

個別の運動量 $\mathbf{p}_k = m_k \dot{\mathbf{x}}_k$ ならまだしも, それを算術的に総和してしまった全運動量 \mathbf{P} とは, 物理的に一体何なのか. これを調べるために, 質点系の重心に着目する.

定義 10.2 (質点系の重心): $M := \sum_{i=1}^N m_i \in \mathbb{R}$ を, N 質点系の全質量という. また,

$$\mathbf{g} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \in V$$

を位置ベクトルとする $G = O \hat{+} \mathbf{g} \in A$ を, N 質点系の重心または質量中心 という.

定理 10.3 (全運動量と重心速度): $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{g}}$ が成立する. すなわち, 全運動量 \mathbf{P} とは, 重心速度 $\dot{\mathbf{g}}$ と同じ方向を向き, 大きさが M 倍のベクトルである.

実際, $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i = M\mathbf{g}$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N (m_i \dot{\mathbf{x}}_i) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \right) \cdot \quad \text{微分の和} \\ &= (M\mathbf{g}) \cdot = M\dot{\mathbf{g}} \quad \text{定義 10.2, } M \text{ は定数} \end{aligned}$$

と計算できる.

定理 10.3 をもう 1 回微分した $\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{g}}$ を (10.5) に代入して, 定理 10.2 の別表記を得る.

系 10.4 (重心運動): N 質点系の重心 \mathbf{g} の運動は,

$$M\ddot{\mathbf{g}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (10.6)$$

にしたがう. 解 $\mathbf{g}(t)$ を重心運動と呼ぶ.

このように, N 質点系の重心運動は, 全質量を重心に集中させた仮想質点が, 外力の総和 \mathbf{F}_{ext} を受けたときの運動と区別できない.

具体例を確認しておく.

課題 16 図 5 の (a) に示すように, 質量 $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$ の 3 質点を, 質量の無視できるばね定数 k のばねで結んだ 3 質点系を考える. ばねは互いに θ の角度をなし, ば

^{b)} 時間的に変化しないということ.

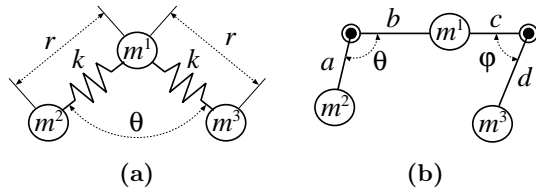


図5 3質点系の例

ねの自然長は r とする．この3質点系の重心運動 $g(t)$ の運動方程式を導け．外力は無いものとする．

課題 17 同様にして，図5の(b)に示すように，3質点を質量が無視できるリンクで結んだ系の重心運動 $g(t)$ の運動方程式を導け．各リンク長を a, b, c, d とし，リンク a と b, c と d は回り対偶をなし，外力は無いものとする．

課題 18 (1) 課題 16 の3質点 m_1, m_2, m_3 が，それぞれ外力 F_1, F_2, F_3 を受けたときの重心の運動方程式を導け．(2) 同様にして，課題 17 の3質点が，外力 F'_1, F'_2, F'_3 を受けたときの重心の運動方程式を導け．(3) $F_1 + F_2 + F_3 = F'_1 + F'_2 + F'_3$ が成立するとき，両者の重心運動と，各質点の運動について相違を述べよ．

結局のところ，質点同士をばねで接合しようが，剛体棒で接合しようが，あるいはバラバラに投げようが，質量の合計と外力の合計が等しければ，重心運動 $g(t)$ は同じである．むしろ個別の質点の運動は異なるが．

空間的な広がりをもつ剛体についても，剛体を微小要素 $dx dy dz$ に分割し，各々の微小要素を質点と見なせば重心運動は $M\ddot{g} = F_{\text{ext}}$ に従う．応力は微小要素間の内力だから相殺される．さらに，複数の剛体からなる剛体系についても，各剛体の重心を質点と見なせば，その重心運動は同じく $M\ddot{g} = F_{\text{ext}}$ に従う．さらに進んで，弾性体や，複数の弾性体からなる系についても，その重心運動は $M\ddot{g} = F_{\text{ext}}$ に従う．どんなにグニャグニャしながら飛んでいようとも，微小要素は質点と見なせるし，時間変動する応力も内力であるから，全体として相殺される．

※ そもそも質点など物理的には実現不可能なわけで，物体^{c)}の重心に着目し，なおかつ回転運動を無視したものが，いわゆる現実的な意味での質点である．

くどいが，注意すべきは，たとえ重心運動が同じであっても，重心と各部の相対運動は，ものによって全く異なる．

^{c)} 体積 0 の質点は実現不可能．もっといえば，変形しない剛体も実現不可能．

Multibody Dynamics

(第 11 回 角運動量と角速度)

吉田勝俊

2007 年 1 月 16 日

§1 トルク方程式の総和

§1 節 (p5-1) によれば, 平面上のトルクは幾何学的には平行四辺形の面積となり, それを空間的に配置した外積 (p5-1) によって, 空間内のトルクが表示できる.

定義 11.1 (トルク): 点 $X = O \hat{+} r$ に作用する力 $F \in V$ が, 基準点 $O \in \mathcal{A}$ を回そうとする作用:

$$T := r \times F$$

を, トルク (torque) という.

改めて, N 質点系の運動方程式 (p10-2) を考える.

$$\dot{p}_k = F_k + \sum_{i=1}^N F_{ik} \quad (k = 1, \dots, N) \quad (10.1b)$$

これからトルクの等式を作るため, (10.1b) の両辺を位置ベクトル x_k で外積すると,

$$x_k \times \dot{p}_k = x_k \times \left(F_k + \sum_{i=1}^N F_{ik} \right)$$

なる関係を得る. 上式右辺は, 質点 $X_k = O \hat{+} x_k$ への外力 $F_k + \sum_{i=1}^N F_{ik}$ が原点 O に発生するトルクである.

消去を狙って両辺を k で総和しておく.

$$\sum_{k=1}^N x_k \times \dot{p}_k = \sum_{k=1}^N x_k \times \left(F_k + \sum_{i=1}^N F_{ik} \right) \quad (11.1)$$

§2 角運動量

まず, 角運動量という物理量を導入して, 総和したトルク方程式 (11.1) の左辺を集約する.

定義 11.2 (角運動量): $l_i := x_i \times p_i$ を, O に発生する質点 X_i の角運動量 (angular momentum) という. 総和 $L := \sum_{i=1}^N l_i$ を, N 質点系の全角運動量 (total angular momentum) という.

補題 11.1: $\dot{x}_k \times p_k = \mathbb{O}$. ゆえに, $\dot{l}_k = x_k \times \dot{p}_k$.

証) $\dot{l}_k = \dot{x}_k \times p_k + x_k \times \dot{p}_k = \underbrace{\dot{x}_k \times (m_k \dot{x}_k)}_{\mathbb{O}} + x_k \times \dot{p}_k$.

この補題と定義 11.2 により, (11.1) の左辺は,

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=1}^N x_k \times \dot{p}_k = \sum_{k=1}^N \dot{l}_k = \dot{L} \quad (11.2a)$$

のように角運動量で書ける.

§3 内力トルクの消去

続いて, (11.1) の右辺を計算する.

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \sum_{k=1}^N \left(x_k \times \left(F_k + \sum_{i=1}^N F_{ik} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(x_k \times F_k + x_k \times \sum_{i=1}^N F_{ik} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^N (x_k \times F_k)}_{T_{\text{ext}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N \left(x_k \times \sum_{i=1}^N F_{ik} \right)}_{T_{\text{int}}} \end{aligned}$$

ここに, T_{ext} は外力が発生するトルクの総和, T_{int} は内力が発生するトルクの総和である. このうちの T_{int} が相殺される.

そのための準備として, 次の補題を確認せよ.

補題 11.2: $(x_i - x_j)$ と F_{ij} は平行. (作図より)

この補題を使うと,

$$\begin{aligned} T_{\text{int}} &= \sum_{k=1}^N \left(x_k \times \sum_{i=1}^N F_{ik} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \left(x_k \times F_{ik} \right) \quad \text{外積の双線形性} \\ &= \sum_{k=i} x_k \times F_{ik} + \sum_{k>i} x_k \times F_{ik} + \sum_{i>k} x_k \times F_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^N x_i \times \underbrace{F_{ii}}_{\mathbb{O}} + \sum_{k>i} x_k \times F_{ik} + \underbrace{\sum_{k>i} x_i \times F_{ki}}_{\text{添字の文字変更}} \\ &= \mathbb{O} + \sum_{k>i} (x_k - x_i) \times F_{ik} \quad \because F_{ki} = -F_{ik} \\ &= \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O} \quad \text{補題 11.2} \end{aligned}$$

より, $T_{\text{int}} = \mathbb{O}$ が示される. ゆえに, (11.1) の右辺には外力に関する項だけが残る.

$$(\text{右辺}) = T_{\text{ext}} := \sum_{k=1}^N (x_k \times F_k) \quad (11.2b)$$

(11.1) に (11.2) を代入すると,

定理 11.3 (角運動量の法則): 全角運動量 L の時間微分は, 外力のトルクの総和 T_{ext} に一致する. すなわち,

$$\dot{L} = T_{\text{ext}} \quad (11.3)$$

である. 特に, $T_{\text{ext}} = \mathbf{0}$ ならば全角運動量は保存する.

以上, 回転性の外力に対して N 質点系が全体として示す性質を, 単独のベクトル方程式 (11.3) で表わすことに成功した.

§4 質点系の運動法則

N 質点系は全体として, 運動量の法則 (10.5) と, 角運動量の法則 (11.3) を満足する. すなわち,

$$\begin{cases} \dot{P} (= M\dot{g}) = F_{\text{ext}} \\ \dot{L} = T_{\text{ext}} \end{cases} \quad (*)$$

を満足するが, 実は, この 2 式には内容の重複がある.

重複を省くために, N 質点系の重心 $G \in \mathcal{A}$ から, 各質点を $X_k = G + \hat{x}'_k$ と測り直す.

補題 11.4: 重心 G から測った各質点 $X_k = G + \hat{x}'_k$ の位置ベクトル x'_k について,

- (1) $\sum_{k=1}^N m_k x'_k = \sum_{k=1}^N m_k \dot{x}'_k = \sum_{k=1}^N m_k \ddot{x}'_k = \mathbf{0}$.
- (2) $\dot{L} = g \times (M\dot{g}) + \sum (x'_k \times (m_k \ddot{x}'_k))$.
- (3) $T_{\text{ext}} = g \times F_{\text{ext}} + \sum (x'_k \times F_k)$.

が成立する.

課題 19 示せ.

ヒント) (1) については, $x_k = g + x'_k$ より, $\sum_{k=1}^N m_k x'_k = \sum_{k=1}^N m_k x_k - \sum_{k=1}^N m_k g = Mg - Mg = \mathbf{0}$. これを時間微分せよ. (2) については, k に関与しない g, \dot{g} などを \sum の外に出す. 例えば, $\sum (m_k (g \times \dot{g})) = (\sum m_k) (g \times \dot{g}) = M(g \times \dot{g})$ とか $\sum (g \times (m_k \ddot{x}'_k)) = g \times \sum (m_k \ddot{x}'_k)$.

補題と角運動量の法則 $\dot{L} = T_{\text{ext}}$ より,

$$\begin{aligned} g \times (M\dot{g}) + \sum (x'_k \times (m_k \ddot{x}'_k)) \\ = g \times F_{\text{ext}} + \sum (x'_k \times F_k) \end{aligned}$$

であるが, 運動量の法則 $M\dot{g} = F_{\text{ext}}$ によって下線部が相殺するから, 最終的に,

$$\begin{aligned} \dot{L}' &:= \sum (x'_k \times (m_k \ddot{x}'_k)) \\ &= \sum (x'_k \times F_k) =: T'_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (11.4)$$

という等式を得る.

以上, 判明したこととして, (*) の連立は,

$$\begin{cases} \dot{P} (= M\dot{g}) = F_{\text{ext}} \\ \dot{L}' = T'_{\text{ext}} \end{cases}$$

と同値である. L' は重心 G を測定原点とする全角運動量, T'_{ext} は同じく G を測定原点とする全トルクである.

以上の計算結果を, 定理としてまとめておく.

定理 11.5 (質点系の運動法則): N 質点系の重心 $G = O + \hat{g}$ から, 各質点を $X_i = G + \hat{x}'_i$ と測る. N 質点系の運動は, 全体として次の法則に従う.

$$\begin{cases} \dot{P} (= M\dot{g}) = F_{\text{ext}}, \\ \dot{L}' = T'_{\text{ext}} \end{cases} \quad (11.5)$$

ただし, M は全質量, F_{ext} は全外力である. T'_{ext}, L' は重心 G を測定原点とする全トルクと全角運動量であり, (11.4) で定義される.

以上, (11.5) の両辺の座標をとって, 数値解などを求めれば, N 質点系の全運動量 $P(t)$ と, 重心まわりの全角運動量 $L'(t)$ が求まる. このうちの全運動量 $P(t)$ は, 定理 10.3 (p10-2) に示したように, 重心速度のスカラー倍 $P(t) = M\dot{g}$ として理解可能である.

これに対して, 全角運動量 $L'(t)$ の理解はそう単純にはいかない. 時間微分 $\dot{L}'(t)$ が全トルク T'_{ext} と釣り合うことから分かるように, 全角運動量が回転運動の何らかの特性量であることは確かなのだが, $L'(t)$ 自体は回転角度ではないし, $L'(t)$ の計算結果から具体的に何を知ればよいのか分らない.

§5 角運動量関数

表記短縮のため以下 $L = L', x = x'$ とする. さてここで, 全角運動量 $L(t)$ を具体的な物理ベクトルと関連づけるには, N 質点系 $\{X_i\}_{i=1}^N$ に強い制限を課す必要がある. 具体的には,

- N 質点系の任意の 2 質点間の距離は変化しない.

と仮定する. この仮定を課された質点系を剛体 (rigid body) という. すなわち, 剛体は変形を許されない.

ここで, 定理 6.2 (p6-1) にある角速度の表現 $\dot{x}_k = \omega_k \times x_k$ を用いると,

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^N (x_k \times p_k) = \sum (x_k \times (m_k \dot{x}_k)) \\ &= \sum m_k (x_k \times \dot{x}_k) = \sum m_k (x_k \times (\omega_k \times x_k)) \end{aligned}$$

と書ける. ここで, 剛体は変形できないので,

- 剛体に許された重心まわりの運動は, 回転運動のみ.
- 回転運動において, 剛体各点 x_k の追い越しはなし.

ということが分かる. ゆえに, 全ての質点は共通の角速度 $\omega_k = \omega$ を持つので, 剛体の全角運動量は,

$$L = J(\omega) := \sum_{k=1}^N m_k (x_k \times (\omega \times x_k)) \quad (11.6)$$

のように ω の関数として書ける. 関数 $J(\omega)$ を, 特に本書では, 角運動量関数と呼ぼう^{a)}.

^{a)} この用語は一般的でない. 慣性モーメント作用素という呼び方をする本もある.

補題 11.6: 角運動量関数:

$$\boldsymbol{\omega} \xrightarrow{J} J(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^N m_k (\mathbf{x}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k))$$

は線形変換 (p6-2) である.

課題 20 示せ.

以上を定理としてまとめておく.

定理 11.7 (全角運動量と角速度): 剛体においては $L = J(\boldsymbol{\omega})$ が成立する. すなわち, 剛体の全角運動量 L とは, 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を線形変換 (11.6) したものである.

したがって, 対象を剛体に制限したときの運動法則は,

$$\begin{cases} M\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}, \\ (J(\boldsymbol{\omega}))' = \mathbf{T}_{\text{ext}} \end{cases}$$

となり, 角運動量の法則 (第 2 式) の未知数を, 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ という具体的なベクトルにすることができた.

以上, 質点系を剛体に制限することにより, 全角運動量 L を角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{a}$ と関連づけることができる. 関連を表わす線形変換 $L = J(\boldsymbol{\omega})$ の行列表示 $[J]$ を, 慣性テンソルと呼ぶが, 次回で導く.

Multibody Dynamics

(第12回 剛体の運動法則)

吉田勝俊

2007年1月16日

参考文献

- [1] 小出昭一郎, 力学 — 物理学 [分冊版], 裳華房, (1997).
- [2] 小出昭一郎・兵藤申一・阿部龍蔵, 物理概論 上巻, 裳華房, (1983).

以降，執筆中．．．