

Multibody Dynamics

吉田勝俊

2006年12月8日

目次

1	空想と論理	1-1
2	筆算用のベクトル	2-1
3	ベクトルの成分表示	3-1
4	直線座標系	4-1
5	外積	5-1
6	回転変換と行列表示	6-1
7	剛体の運動学	7-1
8	ロボット機構学	8-1
	以降, 執筆中 . . .	

Multibody Dynamics

(第1回 空想と論理)

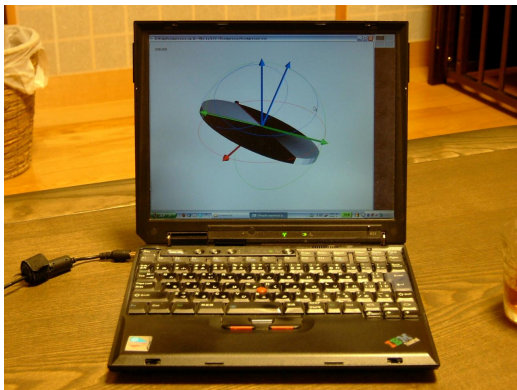
吉田勝俊

2006年10月6日

空想を客観的に行うための常套手段を導入する。

§1 仮想現実と文字操作

回転する円盤の力学シミュレーションである。



この仮想円盤の実体はソフトウェアであり、ソフトウェアは文字情報からなる。詩歌や小説の例をひくまでもなく、文字情報の操作においては、いかなる空想も可能である。ディスプレイ上をまことしやかに運動する円盤ではあるが、それが現実の反映である保証はどこにもない。

意外かもしれないが、数式とて例外ではない。数式もまた文字情報であるから、それ相応の工夫がないかぎり、私的な妄想に陥る危険性は十二分にある。

§2 公理的方法

客観的な空想のために、次のような手順を導入する。

1. 何も書いてない白紙を用意する。
2. そこに少数の基本ルールを書きこむ。
3. 以降、この白紙には、基本ルールと整合する主張しか書き足さない。

このような方法を、公理的方法という。

- 最初に定める基本ルールを定義、公理などと呼び、印を付けて表わす。
- 基本ルールと整合した2次ルールを、定理、公式、命題、補題などと呼び、印で表わす。

整合性のチェックには、数理論理学を使う。

§3 数理論理学

力学現象と矛盾しない、論理の操作方法を導入する。

定義1 (真理値): 真偽の定まった文章を命題という。

- 命題 P が真であることを $P = 1$ と表わす。
- 命題 P が偽であることを $P = 0$ と表わす。

このような真偽を表わす値 1,0 を真理値という。

定義2 (論理記号): 命題 P, Q から別の命題を作るルールを4つ定める。

(1) 論理和 (または) (2) 論理積 (かつ) (3) 否定 (でない)

P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \wedge Q$	P	$\neg P$
1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0		
0	0	0	0	0	0		

(4) 条件命題 (ならば)

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

このような、真理値を並べた表を、真理表という。

(4) の定義に違和感を憶えるひが多いと思う。(4) に対応する日常の論理を挙げておく。例えば、次の揭示は本当か嘘か?

雨の日 \Rightarrow 休講とする

雨の日 ($P = 1$) に、休講したら ($Q = 1$) 揭示は本当 ($P \Rightarrow Q = 1$) だが、授業したら ($Q = 0$) 揭示は嘘 ($P \Rightarrow Q = 0$) である。ところが、雨以外の日 ($P = 0$) に休講しても ($Q = 1$)、授業しても ($Q = 0$)、揭示に嘘はない ($P \Rightarrow Q = 1$)。この状況は (1)~(3) では表せないから、それ用の (4) が用意される。

いや違う、 $P \Rightarrow Q$ の論理は 1,0,0,1 であるべきだとさらに粘りたい諸君は、次の記号を定義して使うべし。

定義3: $P \Leftrightarrow Q \stackrel{\text{定義}}{=} (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q)$ と定める。 $P \Leftrightarrow Q$ を双条件命題という。

何もなかった世界に、3つの (定義 1,2,3) が設置された。この世界に整合する最初の「 \vdash 」を導いてみる。

定理 1 (双条件命題): 双条件命題 $P \Leftrightarrow Q$ について、次の真理表が成立する。

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

例 1: 定義 1, 2, 3 を前提に定理を示せ。

定義 4 (同値記号): 真理値または真理表が一致する命題を、同値であるといい、 $P \Leftrightarrow Q$ または $P \equiv Q$ と書く。

定理 2 (論理の算法): その他いろいろ、同様に示せる。

- (a) $P \vee P \equiv P, P \wedge P \equiv P.$ (累同則)
- (b) $P \vee Q \equiv Q \vee P, P \wedge Q \equiv Q \wedge P.$ (交換則)
- (c) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge R,$
 $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee R.$ (結合則)
- (d) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$
 $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$ (分配則)
- (e) $\neg\neg P \equiv P.$ (二重否定)
- (f) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q, \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q.$
(ド・モルガン)
- (g) $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P).$ (対偶)

例 2: 定義 1, 2, 4 を前提に (d) を示せ。

Report 1: 定義 1, 2, 4 を前提に (g) を示せ。

§4 限定記号

命題 P の真理値が変数 x に依存するとき、 P を命題関数と呼び $P(x)$ などと書く。例えば、

- $P(x) :=$ “ x は光合成する” について、 P (焼き鳥) は偽、 P (生レタス) は真。

このように、命題関数 $P(x)$ の真理値を確定させるには、変数 x に具体的な定数を代入すればよいが、もう 1 つの方法として、限定記号を用いる方法がある。

定義 5 (限定記号): $P(x)$ を命題関数とする。

$\forall x : P(x) \stackrel{\text{定義}}{\iff}$ 全ての (任意の) x について $P(x)$ は真である。

$\exists x : P(x) \stackrel{\text{定義}}{\iff}$ $P(x)$ を真にするような x が (少なくとも 1 つ) 存在する (選べる)。

記号 \forall を全称記号、 \exists を存在記号という。これらを総称して限定記号という。

限定記号付きの命題の否定を作るには、それぞれ、

$$\begin{cases} \neg(\forall x : P(x)) & \equiv \exists x : \neg P(x) \\ \neg(\exists x : P(x)) & \equiv \forall x : \neg P(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

とすればよい。「全ての x で $P(x)$ である」が嘘になるには、 $P(x)$ でない x が少なくとも 1 つあればよい。

§5 全体集合という空想

以上に導入した公理的方法を使って、紙に書ける空想物としての力学を構成していくが、そのような空想物の収容場所として、集合なるもの^{*1}を導入しておく。

定義 6 (集合): そこに属すかどうかが明確に定められた事物の集まりを、集合という。

- x が集合 X の元^{*2}であることを、 $x \in X$ と書く。
- 元でないことを $x \notin X$ と書く。

$x \in X$ は命題であり、 $x \notin X \equiv \neg(x \in X)$ がいえる。

この定義により、全ての集合演算は、数理論理学に帰着する。試みに集合論の公式 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を証明してみよう。そのために次の定義をおく。

- (1) $(x \in A \wedge x \in B)$ を、 $x \in A \cap B$ と表記する。
- (2) $(x \in A \vee x \in B)$ を、 $x \in A \cup B$ と表記する。
- (3) $(x \in A \iff x \in B)$ を、 $A = B$ と表記する。

このとき、

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) & \iff (x \in A) \wedge (x \in B \cup C) \quad \because (1) \\ & \iff \underbrace{(x \in A)}_P \wedge (\underbrace{(x \in B)}_Q \vee \underbrace{(x \in C)}_R) \quad \because (2) \\ & \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \quad \because \text{定理 2 (d)} \\ & \iff (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \quad \because (1) \\ & \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \because (2) \end{aligned}$$

ゆえに $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。(3) よりこれは $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を意味する。証明おわり。

定義 6 によれば、具体的な集合を与えるときに、要素を全て列挙してみせる必要はない。集合に入る入らないの基準さえあれば、それは集合と見なせる。

その結果、全体集合という空想が正当化される。例えば「 2×2 行列の全体集合」といったときに、無限個ある 2×2 行列を全て列挙してみせることはできないが、 2×2 行列かどうかは誰にでも判別できるので、その全体集合が定義できる。同様に、自然数、実数、複素数のそれぞれ全体集合 $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ などを定義できる。

- 「 x は実数」という命題は、 $x \in \mathbb{R}$ と書ける。

その他、実数の n 個組 (x_1, \dots, x_n) の全体を \mathbb{R}^n と書く。

^{*1} これまた空想物。

^{*2} 元=要素。

Multibody Dynamics

(第2回 筆算用のベクトル)

吉田勝俊

2006年10月13日

物理ベクトルとは全く別の方法で、紙に書ける空想物としてのベクトルを構成したい。

§1 筆算用のベクトル

大きさと方向を持ち、矢印で図示され、太字 x, y で書かれるべきもの。これが我々の脳裏にある最も素朴なベクトル像であろうか。

ベクトルの便利さは、それが物理的には力ベクトルだろうが、位置ベクトルだろうが、全く同じ算法が使えるところにある。ようするに、「ベクトル x, y 」という空想の本質は、それ自体よりもむしろ、その算法の側にある。

そこで、ベクトルかどうかの判定基準を、次の8つの算術公式に集約してしまうのが現代の常套手段である。

定義7 (線形空間): 加法 $x + y$, スカラ倍 λx , 等号 = について、次の8公式が使える太字 x, y, \dots の全体集合 L を、線形空間 (linear space) という。

- (L1) $x + y = y + x$ (交換則)
- (L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (結合則)
- (L3) 零ベクトル 0_L が使えて、どんな x でも、
 $x + 0_L = 0_L + x = x$ (零元の存在)
- (L4) どんな x にも、逆ベクトル \bar{x} が作れて、
 $x + \bar{x} = \bar{x} + x = 0_L$. (逆元の存在)
- (L5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- (L6) $1 \in \mathbb{R}$ の作用は、 $1x = x$
- (L7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- (L8) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

線形空間の元を、ベクトル (vector) という。逆元 \bar{x} を $-x$ とも書く。線形空間をベクトル空間ともいう。加法とスカラ倍を線形演算 (linear operation) と総称する。

定義7のベクトルは具体形が不明だが、加法 $x + y$, スカラ倍 λx , 等号 =, 零元 0 , 逆元 \bar{x} を用いた式変形 (L1) ~ (L8) が可能である。式変形だけで何が分かるのか、定義7と整合する有名な「 \square 」を挙げておこう。

定理3 ($0, -1 \in \mathbb{R}$ の作用): V を線形空間とする。

- $0 \in \mathbb{R}$ の作用は、 $0x = 0_L$ for $\forall x \in L$.
- $-1 \in \mathbb{R}$ の作用は、 $(-1)x = \bar{x}$ for $\forall x \in L$.

Report 2: 定義7との整合性を示せ。

§2 幾何ベクトル

定義7のベクトルはあくまで紙面上の筆算用であり、このままでは外界と何ら関連を持たない。筆算と外界をつなぐ基本ルールを追加しよう。

定義8 (幾何ベクトル): V を有向線分の全体集合とする。 $x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ の間の算法を3種類導入する。

- (1) 等号: $x = y \stackrel{\text{定義}}{\iff} x$ と y の向きと長さが等しい。長さ0のときは方向によらず等しいと定める。
- (2) 加法: $x + y \stackrel{\text{定義}}{\iff} x$ の終点を y の始点としたとき、 x の始点から y の終点に向う有向線分。
- (3) スカラ倍: $\lambda x \stackrel{\text{定義}}{\iff} x$ の長さを λ 倍した有向線分。

等号と線型演算 (1) ~ (3) が付与された有向線分 $x \in V$ を、幾何ベクトル (geometric vector) という。その全体集合を幾何ベクトル空間という。

公理1: 幾何ベクトル空間 V は、線形空間をなす。

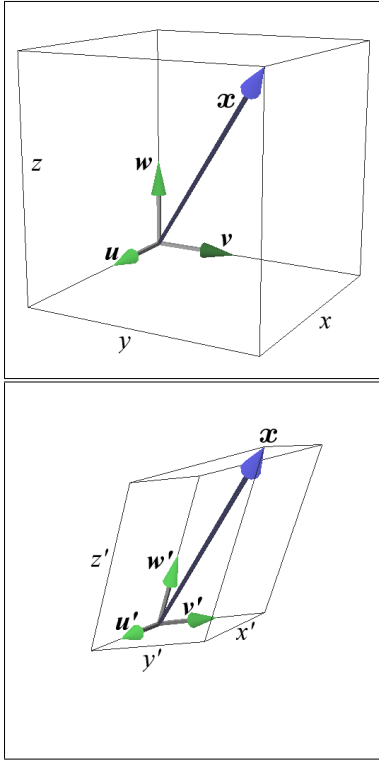
この公理の信憑性は紙の上では検証できない。物理的な検証実験を行なう以外にない。公理的方法では、このような紙面上では検証できない基本法則を、基本ルールに位置付けて話を進める。

課題1 V における (L2) の成立を、図形的に示せ。

§3 幾何ベクトルの直線座標

幾何ベクトル $x \in V$ は図形であり、間違っても数値の組 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ではない。このような図形を数値化するには、別途、座標 (coordinate) という人為的概念が必要になる。

多くの力学書で暗黙に使われている幾何ベクトル $x \in V$ の座標とは、図形的には $x \in V$ を対角線とする「平行6面体の3辺の寸法」のことである。



左右の寸法 $(x, y, z)^T, (x', y', z')^T \in \mathbb{R}^3$ は互いに数値が異なるが、いずれも幾何ベクトル $x \in V$ の座標である。このように、どんな平行6面体を使うかによって座標は変化する。特に直方体で測った座標を直交座標、それ以外を斜交座標といい、両者を直線座標と総称する。

Multibody Dynamics

(第3回 ベクトルの成分表示)

吉田勝俊

2006年10月20日

§1 座標写像

図1に示すような、平行6面体 \mathcal{P} による測定操作を、次のように模式化する。

$$V \ni x \xrightarrow{\text{測定操作 } \varphi_{\mathcal{P}}} \tilde{x} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

つまり、測定操作 $\varphi_{\mathcal{P}}$ は、図形 $x \in V$ に数ベクトル $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ を割り当てる \mathbb{R}^3 値関数としてモデル化できる。

測定操作 $\varphi_{\mathcal{P}}$ を筆算できるようにするため、平行6面体そのものではなく、平行6面体の3辺に沿った単位幾何ベクトルの組 $B = \langle u, v, w \rangle$ をとる。別の平行6面体なら $B' = \langle u', v', w' \rangle$ 等々である。このようなベクトルの組 B や B' を、 V の基底という。特に、単位立方体の3辺からなる基底 $\mathcal{E} = \langle i, j, k \rangle$ を正規直交基底という。どんな $x \in V$ でも、基底の線形結合で、

$$x = xu + yv + zw = x'u' + y'v' + z'w' \quad (3.1)$$

と書けるが、基底 $\langle u, v, w \rangle, \langle u', v', w' \rangle$ がそれぞれの平行6面体の取り方を表わし、展開係数 $(x, y, z)^T, (x', y', z')^T$ が $x \in V$ の各座標となる。このような基底と係数の関係に着目すると、幾何ベクトルから座標を採取する操作を数学的に定式化できる。

定義 9 (座標写像): 幾何ベクトル空間 V から、基底 $B = \langle u, v, w \rangle$ を1つ選んで固定する。 $x \in V$ を $x = xu + yv + zw$ と展開したときの係数 $x, y, z \in \mathbb{R}$ を見つける操作:

$$\varphi_B(x) = \varphi_{\langle u, v, w \rangle}(xu + yv + zw) \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

を、 B が定める座標写像 (coordinate map) と呼ぶ。 $x \in V$ に対する $\tilde{x} \equiv \varphi_B(x) \in \mathbb{R}^3$ を、 B で測った $x \in V$ の座標 (coordinate) もしくは成分 (component) という。 x_i を成分とする $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ を、 $\tilde{x} = [x_i]$ と書く。

このように、幾何ベクトル $x \in V$ と座標 (ベクトル) $\tilde{x} = \varphi_B(x) = [x_i] \in \mathbb{R}^3$ は全くの別物である。 $x \in V$ は基底と同列に存在できるが、 $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ は基底が無いと定義すらできない。

例 3: $B = \langle u, v, w \rangle$ で測った $x = 2v + w \in V$ の座標を求めよ。

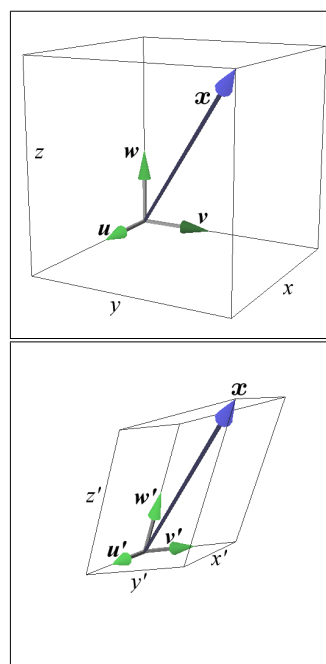


図1 ベクトルの座標

- (1) $2v + w = \boxed{?}u + \boxed{?}v + \boxed{?}w$ の空欄を埋めると、 $2v + w = 0u + 2v + 1w$ となる。
- (2) 係数を抜き出して、 $\varphi_B(x) = \varphi_{\langle u, v, w \rangle}(0u + 2v + 1w) = (0, 2, 1)^T$ を得る。

課題 2 同じ x について、 $B' = \langle u - v, u + v, w \rangle$ で測った座標 $\varphi_{B'}(x)$ を求めよ。 $2v + w = \boxed{?}(u - v) + \boxed{?}(u + v) + \boxed{?}w$ の空欄を埋めればよい。

定理 4 (座標写像の線形性): 数ベクトルの算法を前提に、次が示せる。

- $\varphi_B(x + y) = \varphi_B(x) + \varphi_B(y)$.
- $\varphi_B(\lambda x) = \lambda \varphi_B(x)$. ($\lambda \in \mathbb{R}$)

§2 基底の公理

以上、基底と座標を直感的に導入したが、このままだと問題が起きる。例えば、 u, v, w が同一平面内にあると、その外にあるベクトルの座標が測れない。このような病的状況を排除するために、次の定義を採用する。

定義 10 (基底): 次の 2 条件を満足するベクトルの組 $u, v, w \in V$ を, V の基底 (basis) といい, $B = \langle u, v, w \rangle$ などと書く.

- (1) どんな $x \in V$ でも $x = xu + yv + zw$ と書ける.
- (2) そのときの係数 $x, y, z \in \mathbb{K}$ の決まり方が一意である (成分表示の一意性).

基底を作るのに必要なベクトルの個数を V の次元 (dimension) といい $\dim V$ と書く.

基底でない例を挙げる. $B = \langle u, v, w \rangle$ に $u = v + w$ という付帯条件をつけよう. このとき u, v, w は同一平面内にある. ここで試しに $x = 2u + v + w$ をとると,

$$\begin{aligned} x = 2u + v + w &= 3u + 0v + 0w \\ &= 0u + 3v + 3w = u + 2v + 2w \end{aligned}$$

などなど, 係数が一意に決まらないので, このような B は基底ではない.

§3 基底の回転

基底を回したときの座標変換を与えておく. 単位ベクトル $a \in V$ を回転軸として, $x \in V$ を角度 θ だけ回す変換を $R_{a:\theta}$ と書く^{*3}, 回転後のベクトルは,

$$y = R_{a:\theta}(x) \in V \quad (3.2)$$

と書ける. ベクトル $x, y \in V$ を直交座標で $\tilde{x} = \varphi_{\mathcal{E}}(x)$, $\tilde{y} = \varphi_{\mathcal{E}}(y) \in \mathbb{R}^3$ と表わすと, 回転変換による座標の変化は, 適当な 3×3 行列 $[R_{a:\theta}]$ と数ベクトルの積によって,

$$\tilde{y} = [R_{a:\theta}] \tilde{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.3)$$

と書ける. 3×3 行列 $[R_{a:\theta}]$ を, 回転変換 $R_{a:\theta}$ の行列表示, もしくは回転行列という. 正規直交基底に対する成分を求めてみると, ($\sin \theta = S_{\theta}$, $\cos \theta = C_{\theta}$ と略記)

$$[R_{a:\theta}] = \begin{bmatrix} \alpha^2 + (1 - \alpha^2)C_{\theta} & \alpha\beta(1 - C_{\theta}) - \gamma S_{\theta} & \alpha\gamma(1 - C_{\theta}) + \beta S_{\theta} \\ \alpha\beta(1 - C_{\theta}) + \gamma S_{\theta} & \beta^2 + (1 - \beta^2)C_{\theta} & \beta\gamma(1 - C_{\theta}) - \alpha S_{\theta} \\ \alpha\gamma(1 - C_{\theta}) - \beta S_{\theta} & \beta\gamma(1 - C_{\theta}) + \alpha S_{\theta} & \gamma^2 + (1 - \gamma^2)C_{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

となる^{*4}. ただし α, β, γ は, 回転軸 $a \in V$, $\|a\| = 1$ の座標 $\varphi_{\mathcal{E}}(a) = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ である.

定理 5 (基底の回転): $R_{a:\theta}$ で回転させた基底 $\mathcal{E} = \langle i, j, k \rangle$ を, $R_{a:\theta}(\mathcal{E}) \equiv \langle R_{a:\theta}(i), R_{a:\theta}(j), R_{a:\theta}(k) \rangle$ と書くとき,

$$\varphi_{R_{a:\theta}(\mathcal{E})}(x) = [R_{a:\theta}]^{-1} \varphi_{\mathcal{E}}(x) \quad ([R_{a:\theta}]^{-1} = [R_{a:-\theta}]) \quad (3.5)$$

となる. すなわち, ある幾何ベクトル $x \in V$ について, 回転後の基底 $R_{a:\theta}(\mathcal{E})$ で測った座標は, 回転前の基底 \mathcal{E}

^{*3} 我々はドアノブの回転を知っている. あの回転である. 具体的な算法は 6 章 (p6-1) で構成する.

^{*4} 定義 23 (p6-2) 参照. 同じベクトルでも基底を変えると座標値が変わるが, これに連動して回転行列の成分も変わる.

で測った座標を逆回転させた座標に等しい. $[R_{a:\theta}]^{-1}$ を, 基底の回転 $\mathcal{E} \rightarrow R_{a:\theta}(\mathcal{E})$ に伴う座標変換行列という.

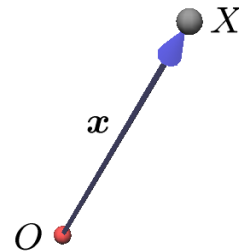
課題 3 定理の「すなわち」以降を, $x \in V$ を風景, 基底をカメラ, 座標を映像に言い換えて述べよ.

§4 空間座標

以上を応用すると, 空間の点の座標を測ることができ. 我々が住むこの物理空間を \mathcal{A} と書き, \mathcal{A} は点集合であると仮定する^{*5}. ここで, 物理空間の点 $X \in \mathcal{A}$ の配置を記録するには,

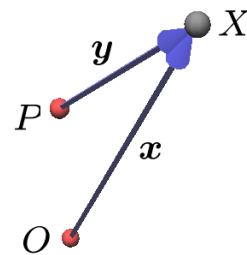
1. 物理空間に原点 $O \in \mathcal{A}$ を定める.
2. 原点 $O \in \mathcal{A}$ から点 $X \in \mathcal{A}$ に向う幾何ベクトル $x \in V$ をとる.

という操作を実行すればよからう.



こうして定めた $x \in V$ を, $O \in \mathcal{A}$ で定まる $X \in \mathcal{A}$ の位置ベクトル (position vector) と呼ぶ. このベクトルの成分 $\tilde{x} \equiv \varphi_{\mathcal{E}}(x) \in \mathbb{R}^3$ が, 空間の点 $X \in \mathcal{A}$ の座標である.

ただし, 同じ $X \in \mathcal{A}$ を別の原点 $P \in \mathcal{A}$ で測ると, x だった位置ベクトルが y に変化し, したがって座標も変化してしまう.



のみならず, 原点が同じでも基底を取り換えれば, これまた別の座標値が得られる.

ということで, 空間の点の座標を確定させるには, 原点 $O \in \mathcal{A}$ と基底 \mathcal{E} のペアを固定しなければならない. このペア (O, \mathcal{E}) を座標系という.

^{*5} 点集合と仮定することの是非は本書では問わない. 点集合と仮定しない宇宙論もあるようである.

Multibody Dynamics

(第4回 直線座標系)

吉田勝俊

2006年10月27日

§1 筆算用の内積

我々の幾何ベクトル空間 V では、まだ、長さや直交性を筆算できない。これらは内積として一括導入できる。

定義 11 (内積): 次の法則で計算可能なベクトルの積 $x \cdot y \in \mathbb{R}$ を、一般に内積 (inner product) という。

- (I1) 双線形性: $x \cdot (\lambda y + \mu z) = \lambda(x \cdot y) + \mu(x \cdot z)$,
 $(\lambda x + \mu y) \cdot z = \lambda(x \cdot z) + \mu(y \cdot z)$.
- (I2) 対称性: $x \cdot y = y \cdot x$.
- (I3) 正定値性: $x \cdot x \geq 0$. 特に $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}_V$.

ここに, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in V$.

定理 6: $x = \mathbf{0}_V \iff a \cdot x = 0$ for $\forall a \in V$.

証明は付録参照。

定義 12 (ノルム): $\|x\| := \sqrt{x \cdot x} \in \mathbb{R}$ を、ベクトル $x \in V$ のノルム (norm) または長さという。

定義 13 (直交性): $x \perp y \in V \iff x \cdot y = 0$.

定理 7 (物理空間の内積): $x, y \in V$ を 2 辺とする三角形に余弦定理 $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta$ が成立するとき、定義 11 の内積の値は、

$$x \cdot y = \|x\|\|y\|\cos\theta$$

に等しい。ただし θ は x, y のなす角。

ヒント) 内積の算法と余弦定理が両立するには?

§2 内積の数値計算

定義 14 (正規直交基底): 基底 $\mathcal{E} := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$:

$$u_i \cdot u_j = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } i = j. \text{ (正規性)} \\ 0 & \text{if } i \neq j. \text{ (直交性)} \end{cases}$$

を、正規直交基底 (orthonormal basis) という。 δ_{ij} をクロネッカーのデルタ (Kronecker's delta) という。正規直交基底で測った座標を正規直交座標という。

定理 8 (内積の値): 内積 $x \cdot y$ の数値は、正規直交座標 $\tilde{x} = \varphi_{\mathcal{E}}(x)$, $\tilde{y} = \varphi_{\mathcal{E}}(y)$ の標準的な内積に一致する。

$$x \cdot y = \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle := \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

ヒント) $x, y \in V$ は基底 \mathcal{E} の線形結合で、それぞれ、 $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$, $y = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ と書

ける。 $(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) \cdot (y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3)$ を双線形性で展開し、定義 14 (p4-1) で整理せよ。

したがって、正規直交座標 $[x_i] = \varphi_{\mathcal{E}}(x)$ を使うと、長さは三平方の定理 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ で書ける。

§3 位置ベクトルの算法

我々が住むこの 3 次元空間を点集合 \mathcal{A} と見なす。空間の点 $P \in \mathcal{A}$ の位置を、ベクトル $p \in V$ で測量する。

定義 15 (平行移動): そのために、空間の点 $P \in \mathcal{A}$ とベクトル $p \in V$ のペアに、別の点を対応づける算法:

$$P \in \mathcal{A}, p \in V \implies P \hat{+} p \in \mathcal{A}$$

- (A1) $P \hat{+} \mathbf{0}_V = P$.
- (A2) $(P \hat{+} p) \hat{+} q = P \hat{+} (p + q)$.
- (A3) $O, X \in \mathcal{A} \implies \exists! x \in V$ s.t. $X = O \hat{+} x$.

を導入する。算法 “ $\hat{+}$ ” を平行移動 (translation) という。この算法が使える点集合と線形空間のペア (\mathcal{A}, V) を、アファイン空間という。

定義 16 (位置ベクトル): 原点 $O \in \mathcal{A}$ を定めると、 $P \in \mathcal{A}$ は一意に、

$$P = O \hat{+} p \quad \therefore \text{(A3)}$$

と書ける。このときの $p \in V$ を、原点 O で測った $P \in \mathcal{A}$ の位置ベクトル (position vector) という。

例 4 (原点の交換): $O \in \mathcal{A}$ から測った $P \in \mathcal{A}$ の位置ベクトルを $p \in V$, $P \in \mathcal{A}$ から測った $R \in \mathcal{A}$ の位置ベクトルを $r \in V$ とする。このとき、 $O \in \mathcal{A}$ から測った $R \in \mathcal{A}$ の位置ベクトルを求めよ。

$P = O \hat{+} p$ を $R = P \hat{+} r$ に代入すると

$$\begin{aligned} R &= (O \hat{+} p) \hat{+} r \\ &= O \hat{+} (p + r) \quad \therefore \text{(A2)} \end{aligned}$$

だから、 $O \in \mathcal{A}$ から測った $R \in \mathcal{A}$ の位置ベクトルは $p + r$ である。

課題 4 物理空間の 4 点 $O, P, Q, R \in \mathcal{A}$ が、

$$P = Q \hat{+} p, Q = O \hat{+} q, R = P \hat{+} r, \quad p, q, r \in V$$

の関係にあるとき、 $O \in \mathcal{A}$ から測った $R \in \mathcal{A}$ の位置ベクトル $v \in V$ を求めよ。

定義 17 (空間座標): $P = O \hat{+} p$ とする. 位置ベクトル $p \in V$ の座標:

$$\tilde{p} = \varphi_B(p) \in \mathbb{R}^3$$

を, 原点 O と基底 B で測った $P \in \mathcal{A}$ の空間座標 (spatial coordinate) という. 原点を明示したいときは, $\tilde{p} = \varphi_B^O(p)$ と書く.

略記法 簡単のため, 内積をまねた略記法:

$$\tilde{x} \cdot \vec{B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \langle u, v, w \rangle := x_1 u + x_2 v + x_3 w$$

を導入する. 基底と座標の関係が,

$$x = \varphi_B(x) \cdot \vec{B} \quad (= x_1 u + x_2 v + x_3 w)$$

のように短かく書ける. ゆえに点 $P \in \mathcal{A}$ は,

$$P = O \hat{+} p = O \hat{+} \varphi_B(p) \cdot \vec{B}$$

と書いて, (O, B) を陽に記せて便利. 以上,

$$P = O \hat{+} \tilde{p} \cdot \vec{B} \quad (= O \hat{+} \varphi_B(p) \cdot \vec{B})$$

と書けたときの $\tilde{p} \in \mathbb{R}^3$ を, O と B で測った $P \in \mathcal{A}$ の空間座標という.

§4 直線座標系

定義 17 によれば, 点 $P \in \mathcal{A}$ の座標 $\tilde{p} \in \mathbb{R}^3$ が確定するには, 原点 $O \in \mathcal{A}$ と基底 $B \subset V$ のペアを指定する必要がある. このペアには名前がある.

定義 18 (直線座標系): 基準点 $O \in \mathcal{A}$ と基底 $B \subset V$ のペア $\mathcal{F} \equiv (O, B)$ を, 直線座標系 (linear coordinate system), または枠 (frame), フレームという.

例えば, $\mathcal{F} = (O, B)$ で測った $P \in \mathcal{A}$ の座標が $\tilde{p} \in \mathbb{R}^3$ であるとき, 点 $P \in \mathcal{A}$ は,

$$P = O \hat{+} \tilde{p} \cdot \vec{B} = O \hat{+} \varphi_B(p) \cdot \vec{B}$$

と数式表現できる.

ある直線座標系 (O, \mathcal{E}) と, これを回転・平行移動した直線座標系 $(O \hat{+} r, R(\mathcal{E}))$ を考える. (R は回転軸 $a \in V$ まわりに角度 θ だけ回す変換)

定理 9 (枠の変更): $P \in \mathcal{A}$ の空間座標が, 直線座標系 (O, \mathcal{E}) , $(O \hat{+} r, R(\mathcal{E}))$ によって, それぞれ,

$$P \in \mathcal{A} \xrightarrow{(O, \mathcal{E})} \tilde{p} \in \mathbb{R}^3$$

$$P \in \mathcal{A} \xrightarrow{(O \hat{+} r, R(\mathcal{E}))} \tilde{p}' \in \mathbb{R}^3,$$

のように測られたとする. すなわち $O \hat{+} \tilde{p} \cdot \mathcal{E} = P = (O \hat{+} r) \hat{+} \tilde{p}' \cdot R(\mathcal{E})$. このとき,

$$\tilde{p} = \varphi_{\mathcal{E}}(r) + [R] \tilde{p}'$$

が成立する. このような回してから ($[R]$), 平行移動する ($\varphi_{\mathcal{E}}(r) +$) ような変換を, アファイン変換 (affine transformation) という.

ヒント) 定理 4 (p3-1), 定理 5 (p3-2), 定義 15 (p4-1) を使う.

$$P = (O \hat{+} r) \hat{+} p' = O \hat{+} (r + p') \quad \therefore (A2)$$

$$= O \hat{+} \varphi_{\mathcal{E}}(r + p') \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \therefore \text{略記法}$$

$$= O \hat{+} (\varphi_{\mathcal{E}}(r) + \varphi_{\mathcal{E}}(p')) \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \therefore \text{定理 4}$$

$$= O \hat{+} (\varphi_{\mathcal{E}}(r) + \varphi_{R^{-1}R(\mathcal{E})}(p')) \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \therefore \text{逆写像}$$

$$= O \hat{+} (\varphi_{\mathcal{E}}(r) + [R] \varphi_{R(\mathcal{E})}(p')) \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \therefore \text{定理 5}$$

§ 付録

定理 6 の証明 まず 「 $x = \mathbb{O}_V \implies a \cdot x = 0, \forall a$ 」を示す. $x = \mathbb{O}_V$ を仮定すると,

$$a \cdot x = a \cdot \mathbb{O}_V = a \cdot (0a) \quad 0 \in \mathbb{R} \text{ の作用 (p2-1)}$$

$$= 0(a \cdot a) \quad (I1)$$

$$= 0 \quad \text{算数.}$$

と計算できる. どんな a でも成立するから, 題意を得る.

次に 「 $x = \mathbb{O}_V \iff a \cdot x = 0, \forall a$ 」を示すが, 簡単のために, これと同値な対偶*6:

$$\neg(x = \mathbb{O}_V) \implies \neg(a \cdot x = 0, \forall a)$$

を示す. $x = \mathbb{O}_V$ の否定は $x \neq \mathbb{O}_V, a \cdot x = 0, \forall a$ の否定は $a \cdot x \neq 0, \exists a$ であるから*7, 次を示せばよい.

$$(x \neq \mathbb{O}_V) \implies (a \cdot x \neq 0, \exists a) \quad (*)$$

この (*) は, a の存在を主張する命題である. 一般に存在を証明するには, 該当するものが実際に発見できればよい. つまり, 試行錯誤的に a の候補を作り, それが条件を満たせば証明完了である.

まず題意の通り $x \neq \mathbb{O}_V$ を仮定する. ここで a の候補として試しに $a = x$ をとる. このとき,

$$a \cdot x = x \cdot x \geq 0 \quad \therefore (I3) \text{ 正定性}$$

となるが, (I3) の後半より $x = \mathbb{O}_V$ の場合にしか $x \cdot x = 0$ の可能性はないので, 結局, $x \cdot x > 0$ となり, この候補は $a \cdot x \neq 0$ を満足する.

以上, 具体的な a の見付け方 $a = x$ が判明したので, 命題 (*) は真である. ゆえに \iff の証明が完了した.

*6 定理 2 (p1-2) の (g).

*7 「全ての a で ~ である」の否定は 「~ でない a が少くとも一つある」になる. 式 (1.1) (p1-2) 参照.

Multibody Dynamics

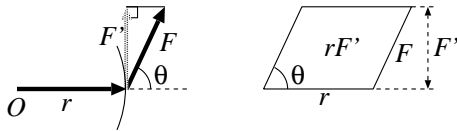
(第5回 外積)

吉田勝俊

2006年11月18日

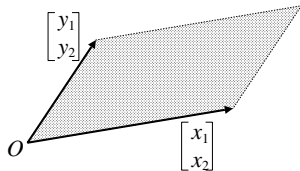
§1 平行四辺形

物理量には、図形的に、平行四辺形の面積であるものも少なくない。例えば、原点 O から r だけ離れた点に力 F が作用するとき、原点を回そうとする作用、すなわちトルク (torque) の大きさ S は、 r と、 F の回転方向成分 F' の積 $S = rF'$ として定義される。



$F' = F \sin \theta$ より $S = rF' = rF \sin \theta$ となり、 S は r, F を 2 辺とする平行四辺形の面積である。

平面ベクトル $x, y \in V$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を $D(x, y)$ と表記しよう。その値を x, y の座標成分で書き下したい。



定理 10: 平行四辺形の面積 $D(x, y)$ は、 x, y の正規直交座標 $[x_i], [y_i] \in \mathbb{R}^2$ からなる 2 次行列式、

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

に一致する。 $D(x, y)$ を一般に符号付面積という。

課題 5 示せ。(長方形から余計な三角形を除く)

例えば、冒頭の平面内のトルクは、 r, F の正規直交座標 $[r_i], [F_i] \in \mathbb{R}^2$ を用いて、 $D(r, F) = r_1 F_2 - F_1 r_2$ と計算できる。

1 つ次元を上げて、 $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ を 3 辺とする平行六面体の体積を $D(x, y, z)$ と書こう。

定理 11: 平行六面体の体積 $D(x, y, z)$ は、 x, y, z の正規直交座標 $[x_i], [y_i], [z_i] \in \mathbb{R}^3$ からなる 3 次行列式、

$$D(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

に一致する。 $D(x, y, z)$ を一般に符号付体積という。

§2 外積

平面上の符号付面積 $D(x, y)$ を、平面から引き剥して、3次元空間 \mathbb{R}^3 に配置したものを、 \mathbb{R}^3 の外積という。

定義 19 (面ベクトル): 平面図形 S に垂直で、長さが S の面積 S に等しい幾何ベクトル $s \in V$ を、 S の面ベクトル (surface vector) という。

公理 2 (面ベクトルの座標): $\mathcal{E} := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ を正規直交基底とする。面ベクトル:

$$s = S_1 u_1 + S_2 u_2 + S_3 u_3$$

の直交座標成分 S_i は、基底ベクトル u_i を法線とする面に投影された S の正射影^{*8} の面積に一致する。(正規直交基底について $S_i = s \cdot u_i$ に注意しておく)

課題 6 図示せよ。

定義 20 (外積): $a, b \in V$ を 2 辺とする平行四辺形 \mathcal{R}_{ab} の面ベクトル:

$$s \equiv a \times b \in V$$

を、 a と b の外積 (cross product) と呼ぶ。 s の向きは、 a から b へ回した右ねじの進行方向とする (右手系)。

平行四辺形 \mathcal{R}_{ab} の正射影は平行四辺形だから、外積の座標は符号付面積で書ける。 $a = [a_i] \in \mathbb{R}^3$ に対して、

$$a_1 := \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, a_2 := \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}, a_3 := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

と表記する。

定理 12 (外積の座標): 外積 $a \times b$ の正規直交座標は、 $a \times b = D(a_1, b_1)u_1 + D(a_2, b_2)u_2 + D(a_3, b_3)u_3$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} u_1 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} u_3 \quad (5.2)$$

と書ける。

定理 13 (外積の基本法則): 次の公式が成立する。

(O1) 双線形性: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda a + \mu b) \times c = \lambda(a \times c) + \mu(b \times c),$$

$$a \times (\lambda b + \mu c) = \lambda(a \times b) + \mu(a \times c).$$

^{*8} 投影面に垂直な平行光線による射影を正射影 (または直交射影, orthogonal projection) という。

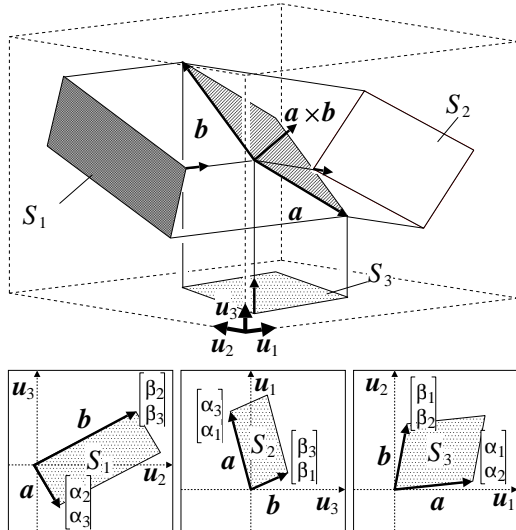


図2 外積の座標

- $D(\lambda x + \mu y, x_2, x_3) = \lambda D(x, x_2, x_3) + \mu D(y, x_2, x_3),$
 $D(x_1, \lambda x + \mu y, x_3) = \lambda D(x_1, x, x_3) + \mu D(x_1, y, x_3),$
 $D(x_1, x_2, \lambda x + \mu y) = \lambda D(x_1, x_2, x) + \mu D(x_1, x_2, y).$
- (2) 歪対称性 (任意の2つを入れ替えると符号が反転):
- $$D(x_1, x_2, x_3) = -D(x_2, x_1, x_3)$$
- $$= -D(x_1, x_3, x_2) = -D(x_3, x_2, x_1).$$
- ゆえに $D(x, x, y) = D(x, y, y) = D(x, y, x) = 0.$
- (3) 単位体積: 正規直交基底 $\mathcal{E} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ について, $D(u_1, u_2, u_3) = 1.$

この $D(x, y, z)$ を, 符号付体積 (signed volume) という.

公理4を前提に定理11が証明できる. $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3, y = y_1 u_1 + \dots$ 等を代入し整理せよ.

- (O2) 歪対称性: $a \times b = -b \times a$. ゆえに $a \times a = \mathbf{0}_V$.
- (O3) 正規直交基底 $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ について,
- $$u_1 \times u_2 = u_3, u_2 \times u_3 = u_1, u_3 \times u_1 = u_2.$$

命題14 (三重積と四重積): 力学に便利な公式たち.

- (O4) スカラ三重積: D は符号付体積
- $$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c = D(a, b, c).$$
- (O5) ベクトル三重積: $(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a,$
- $$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c.$$
- (O6) ベクトル四重積:
- $$a \times (b \times (a \times b)) = b \times (a \times (a \times b)).$$

課題7 数式処理ソフトで (O1) ~ (O6) の成立を示せ.

§ 付録

以下の基本ルール () を用いると, 行列式を使わないで $D(\dots)$ のまま筆算できる.

公理3 (符号付面積): $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ とする.

- (1) 双線形性 (2重線形性):
- $$D(\lambda x + \mu y, z) = \lambda D(x, z) + \mu D(y, z), D(x, \lambda y + \mu z) = \lambda D(x, y) + \mu D(x, z).$$
- (2) 歪対称性 (わいたいしょうせい): $D(x, y) = -D(y, x)$. ゆえに $D(x, x) = 0$.
- (3) 単位面積: 正規直交基底 $\mathcal{E} = \langle u_1, u_2 \rangle$ について,
- $$D(u_1, u_2) = 1.$$

以上に従う $D(x, y)$ を, 符号付面積 (signed area) と呼ぶ.

公理4 (符号付体積): $x_1, x_2, x_3, x, y \in \mathbb{R}^3$ とする.

- (1) 3重線形性:

Multibody Dynamics

(第6回 回転変換と行列表示)

吉田勝俊

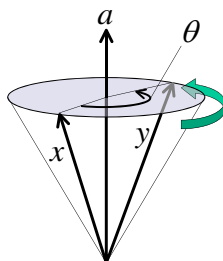
2006年12月1日

§1 回転変換

回転後のベクトル y を, 回転軸 a , 回転角 θ , 回転前のベクトル x の関係式として書き下したい.

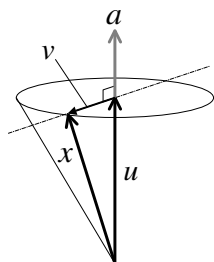
定理 15 (回転変換): 単位ベクトル $a \in V$ を回転軸として, $x \in V$ を角度 θ だけ回転させる変換は,

$R_{a,\theta}(x) := (a \cdot x)a + \cos \theta(x - (a \cdot x)a) + \sin \theta(a \times x)$ と書ける.



次のように証明できる. まず, x を, 回転軸 a 方向の成分 u と, 円盤上の成分 v に分解する.

$$x = u + v \quad (6.1)$$



a と x のなす角を α とすると, u の長さは $\|u\| = \|x\| \cos \alpha$ と書けるが, $\|a\| = 1$ を仮定しているので, $\|u\| = \|a\| \|x\| \cos \alpha = a \cdot x$ となる. 単位ベクトル a の方向に u をとったから, 結局のところ,

$$u = \|u\| a = (a \cdot x)a \quad (6.2)$$

という表現を得る. したがって,

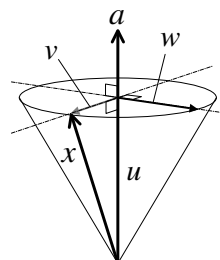
$$v = x - (a \cdot x)a \quad (6.3)$$

である. 以上, 円盤にぴったり収まるベクトルが 1 本, v として確保できた.

次に, 同じ円盤上で v と直交するもう一つのベクトル,

$$w = a \times x \quad (6.4)$$

を作る. 外積の定義より, w は, a, x を 2 辺とする平行四辺形に直交するから, たしかに w は円盤に平行かつ v に直角である.



w が円盤にぴったり収まること, すなわち $\|w\| = \|v\|$ を示しておく. a, x のなす角を α とすると, まず, 外積の定義より, $\|w\| = \|a \times x\| = \|a\| \|x\| \sin \alpha = \|x\| \sin \alpha$ が言える. 他方, u, v, x の直角三角形に着目すると, $\|v\| = \|x\| \sin \alpha$ であり, したがって,

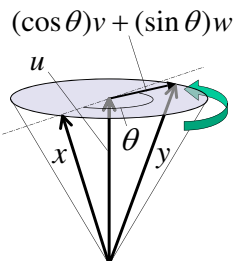
$$\|w\| = \|x\| \sin \alpha = \|v\|$$

となる. 以上, 円盤上に直交ベクトル v, w を確保できた.

最後に, 円盤上で v を θ だけ回したベクトルは,

$$v' = \cos \theta v + \sin \theta w$$

と書けるから, $y = u + v' = u + \cos \theta v + \sin \theta w$ がいえる. これに (6.2) ~ (6.4) を代入して, 定理 15 の式: $y = (a \cdot x)a + \cos \theta(x - (a \cdot x)a) + \sin \theta(a \times x)$ を得る.



§2 角速度

定理 16 (角速度): 回転軸 $a \in V$ ($\|a\| = 1$) に, 回転角の時間微分 $\dot{\theta} \in \mathbb{R}$ を乗じた $\omega := \dot{\theta}a \in V$ を角速度

(angular velocity) という。点 $O \in A$ を中心に角速度 ω で回転する点 $P = O + x$ の速度は、

$$\dot{x} = \omega \times x$$

と書ける。

ヒント) $\theta = \theta(t)$ と見て、回転変換 $y(t) = R_{a,\theta(t)}(x)$ を時間微分すると、 $\dot{y}(t) = \mathbb{O} - \dot{\theta} \sin \theta (x - (a \cdot x)a) + \dot{\theta} \cos \theta (a \times x)$ だが、作図より $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)|_{\theta=0}$ 。

定理 17 (角速度の加法性): $O \in A$ を中心に $\omega_1 \in V$ で回転する剛体^{*9} を、同時に $\omega_2 \in V$ でも回転させる (O は同じ)。このとき、剛体上の点 P の角速度は、ベクトルの加法で $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in V$ と書ける。

ヒント) $P = O + x$ の速度は $\dot{x} = (\omega_1 \times x) + (\omega_2 \times x)$ 。

§3 線形変換

数ベクトル x から数ベクトル y への変換:

$$x \xrightarrow{F} y = F(x) \in \mathbb{R}^n$$

を考える。

定理 18: F の変換則が、適当な行列 A によって $F(x) = Ax$ と書けるための必要十分条件は、

- (1) $F(x + y) = F(x) + F(y)$.
- (2) $F(\lambda x) = \lambda F(x)$. ($\lambda \in \mathbb{R}$)

である。(証明略)

定義 21: 定理の 2 条件を満足する変換則 $F : x \mapsto y$ を、線形変換 (linear transformation) という。

課題 8 (外積作用素) $a = [a_i] \in \mathbb{R}^3$ を定ベクトルとする。これと $x = [x_i] \in \mathbb{R}^3$ との外積が作る変換則:

$$x \xrightarrow{C} y = C(x) := a \times x$$

が線形変換であることを示せ。この C を外積作用素と呼び、 $C = a^\times$ などと書く。(p5-1 の (O1) を使う)

§4 行列表示

簡単のため $x, y \in \mathbb{R}^3$ で考える。線形変換 $y = F(x)$ の変換則は、定理 18 より、適当な 3×3 行列、

$$A = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

によって、 $F(x) = Ax$ と書ける。

課題 9 $x = [x_i]$ に対する $y = [y_i] = F(x)$ の値は、何らかの方法で具体的に計算できるとする。行列 A の成分を推定するには、どんな x を何種類代入すればよいか?

行列の 1 列目は、 \mathbb{R}^3 の基底ベクトル $(1, 0, 0)^T$ を代入すれば判明する。

$$F \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ?_{11} & ?_{12} & ?_{13} \\ ?_{21} & ?_{22} & ?_{23} \\ ?_{31} & ?_{32} & ?_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ?_{11} \\ ?_{21} \\ ?_{31} \end{bmatrix}$$

同様に、第 2、第 3 の基底ベクトルを代入していけば、

$$F \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ?_{12} \\ ?_{22} \\ ?_{32} \end{bmatrix}, F \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ?_{13} \\ ?_{23} \\ ?_{33} \end{bmatrix}$$

のように、全ての成分が判明する。

定義 22 (標準基底): $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ を、 \mathbb{R}^n の標準基底と呼ぶ。

定理 19 (行列表示): 線形変換 $F(x)$ の変換則は、 $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_n)$ を列ベクトルとする行列

$$A = [(e_1), F(e_2), \dots, F(e_n)]$$

によって、 $F(x) = Ax$ と書ける。 A を、 F の行列表示 (matrix representation) と呼び、 $A = [F]$ と書く。

課題 10 (反対称行列) 外積作用素 $a^\times(x) := a \times x$ の行列表示 $[a^\times]$ を求めよ。

ヒント) 定理 12 (p5-1) を復習すると、 $a = [a_i]$, $x = [x_i]$ に対して、

$$a^\times(x) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix}$$

である。このとき、

$$a^\times \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0 \\ a_3 \cdot 1 - a_1 \cdot 0 \\ a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

によって、 $[a^\times]$ の 1 列目が判明する。以下同様に求めよ。

容易に確かめられるように、 $[a^\times]$ を転置すると符号が反転 $[a^\times]^T = -[a^\times]$ するので、外積作用素の行列表示 $[a^\times]$ のことを、反対称行列と略称する文献もある。

課題 11 $R_{a,\theta}(x)$ を定理 15 の回転変換とする。

- (1) $R_{a,\theta}$ が線形変換であることを示せ。
- (2) 行列表示 $[R_{a,\theta}]$ を、数式処理ソフトで求めよ。

定義 23 (回転行列): 回転変換の行列表示:

$$[R_{a,\theta}] = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_1^2)C_\theta & \alpha_1\alpha_2(1 - C_\theta) & \alpha_1\alpha_3(1 - C_\theta) \\ +\alpha_1^2 & -\alpha_3S_\theta & +\alpha_2S_\theta \\ \alpha_1\alpha_2(1 - C_\theta) & (1 - \alpha_2^2)C_\theta & \alpha_2\alpha_3(1 - C_\theta) \\ +\alpha_3S_\theta & +\alpha_2^2 & -\alpha_1S_\theta \\ \alpha_1\alpha_3(1 - C_\theta) & \alpha_2\alpha_3(1 - C_\theta) & (1 - \alpha_3^2)C_\theta \\ -\alpha_2S_\theta & +\alpha_1S_\theta & +\alpha_3^2 \end{bmatrix}$$

を、回転行列という。ただし $S_\theta := \sin \theta$, $C_\theta := \cos \theta$ 。

^{*9} それ上の任意の 2 点間の距離が変化しない物体を、剛体 (rigid body) という。

Multibody Dynamics

(第7回 剛体の運動学)

吉田勝俊

2006年12月8日

§1 剛体のモデル

図形の数学モデルを考える。現代的には、キャンパスを全体集合 A としたときの部分集合 $X \subset A$ として、図形をモデル化する。

- ディスプレイの全画素 \iff 全体集合
- そのなかの輝点の集合 \iff 図形
- 図形が動くこと = 輝点のすり替え。
- 図形の運動 = 部分集合の更新。

この空想においては、図形が動いても、キャンパスの点自体は動かない。代りに図形の構成点が更新されていく。運動によって図形の構成粒子が変化するという空想は、我々の経験的な実感に合わないが、このような「土台とのずれ」というようなものを空想しないかぎり、運動は表現できない。

以上と同様にして、我々の物理空間 A を点集合と見なし、そのなかの物体 \mathcal{X} を、物理空間の部分集合 $\mathcal{X} \subset A$ としてモデル化する。

特に、物体 \mathcal{X} を構成する任意の2点 $P, Q \in \mathcal{X}$ の距離が不変であるような物体を、剛体 (rigid body) という。また、同一空間に共存する N 個の剛体 $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_N \subset A$ を、 N 剛体系 (N rigid bodies) という。

§2 剛体の姿勢

剛体の運動扱うための理論には、少なくとも次の機能を持たせたい。

機能 (1) 剛体の姿勢 (位置と向き) を表現できる。

機能 (2) 剛体の形状 (構成粒子の空間配置) を表現できる。

まず、物理空間 A と測量用の線形空間 V をとる。これらのペア (A, V) を、アファイン空間と呼んだ^{*10}。そこから原点 $O \in A$ と、 V の基底 \mathcal{E} を選んで固定する。これらのペア (O, \mathcal{E}) を、直線座標系または枠と呼んだ^{*11}。

ここで、 N 剛体系の空間的な配置を表現するためのアイデアとして、 $N+1$ 個の枠をとる。

$$\mathcal{F}_0 = (O, \mathcal{E}), \quad \mathcal{F}_i = (X_i, \mathcal{E}_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (7.1)$$

^{*10} 定義 15 (p4-1) 参照。

^{*11} 定義 18 (p4-2) 参照。

このうちの1つ $\mathcal{F}_0 := (O, \mathcal{E})$ を物理空間 A に固定し (0番は便宜上)、共通の基準と見なす。 \mathcal{F}_0 を基準枠と呼ぶ。残りの $\mathcal{F}_i = (X_i, \mathcal{E}_i)$ は i 番目の剛体に固定し、これら \mathcal{F}_i を物体枠と呼ぶ。

定義 24: 以下、枠 \mathcal{F}_k から測った位置ベクトルを、コロン付きで \bullet_k と書く。

i 番目の剛体の姿勢を次のように表示する。

$$\begin{cases} X_i = O \hat{+} x_{0:i}, & (\text{剛体の原点}) \\ \mathcal{E}_i = R_i(\mathcal{E}). & (\text{剛体の回転姿勢}) \end{cases} \quad (7.2)$$

ただし、 $R_i := R_{\alpha_i: \theta_i}$ は回転変換である。基準原点 O から剛体原点 X_i へ至る位置ベクトル x_i によって剛体の位置が表現され、基準基底 \mathcal{E} から剛体基底 \mathcal{E}_i に至る回転変換 R_i によって剛体の向きが表現される。

以上、機能 (1) は、 $x_{0:i}, R_i$ による方法で実現できる。

§3 基準座標と物体座標

同じ点 $P \in A$ を、基準枠 \mathcal{F}_0 と物体枠 \mathcal{F}_i でそれぞれ、

$$\begin{aligned} P \in A &\xrightarrow{\mathcal{F}_0 = (O, \mathcal{E})} \tilde{p}_{0:} \in \mathbb{R}^3 \\ P \in A &\xrightarrow{\mathcal{F}_i = (X_i, R_i(\mathcal{E}))} \tilde{p}_{i:} \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

と測るとき、すなわち、

$$\begin{aligned} P &= O \hat{+} p_{0:} = O \hat{+} \varphi_{\mathcal{E}}(p_{0:}) \cdot \vec{\mathcal{E}} = O \hat{+} \tilde{p}_{0:} \cdot \vec{\mathcal{E}} \\ P &= X_i \hat{+} p_{i:} = X_i \hat{+} \varphi_{\mathcal{E}}(p_{i:}) \cdot \vec{\mathcal{E}} = X_i \hat{+} \tilde{p}_{i:} \cdot \vec{\mathcal{E}}_i \end{aligned}$$

と測るとき、 \mathcal{F}_0 で測った $\tilde{p}_{0:}$ を基準座標、 \mathcal{F}_i で測った $\tilde{p}_{i:}$ を物体座標という。

両者の関係は、定理 9 (p4-2) の枠 (座標系) の変更方法を使うと、(7.2) に注意して、

$$\tilde{p}_{0:} = \varphi_{\mathcal{E}}(x_{0:i}) + [R_i] \tilde{p}_{i:} \quad (7.3)$$

というアファイン変換で書ける。

ここでいう物体座標は、物体がロボットならロボット座標、航空機の機体なら機体座標と呼ばれる。基準座標はワールド座標とも呼ばれる。

(7.3) の使い道を、 N 台のロボットがある対象 $P \in A$ を探査する状況に例えて示そう。次の仮定をおく。

- 基地にワールド座標系 $\mathcal{F}_0 = (O, \mathcal{E})$ を設置する。

- 各ロボットにロボット座標系 $\mathcal{F}_i = (O \hat{+} x_{0:i}, R_i(\mathcal{E}))$ を設置する .
- 各ロボットの位置 $x_{0:i}$ と向き R_i は, 常に計測可能 .

基地 \mathcal{F}_0 からみたある対象 P をワールド座標 $\tilde{p}_{0:}$ ($P = O \hat{+} \tilde{p}_{0:} \cdot \vec{\mathcal{E}}$) が未知の状況を考える . 探査を開始したところ, i 番目の探査ロボット \mathcal{F}_i が P を発見し, \mathcal{F}_i から見た P のロボット座標 $\tilde{p}_{i:}$ が明らかになったとする . ロボット座標 $\tilde{p}_{i:}$ を受信した基地 \mathcal{F}_0 は, (7.3) によって, P のワールド座標 $\tilde{p}_{0:} = \varphi_{\mathcal{E}}(x_{0:i}) + [R_i] \tilde{p}_{i:}$ を特定することができる .

§4 同次変換

(7.3) を, 成分が見えるように書くと,

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ r_i \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

のような格好をしている . 若干トンを効かすと, 同じ変換則は,

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ r_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

のようにも書くことができる (上 3 行に着目せよ) . 第 4 成分の “1” は, このような算法上のトリックを実現するためのダミー成分であり, 物理的な意味はない .

この画期的なトリックにより, 回転してから平行移動するアファイン変換則 (7.4) を, 4×4 の行列 1 個で,

$$H = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

のように一発表記できる . 行列 H を同次変換行列^{*12}といい, それによる変換式 (7.5) を同次変換という .

§5 剛体の形状

機能 (2) を実現して本章を終える . 剛体上の点 $P_i \in \mathcal{X}_i$ を, 同じ剛体の物体枠 $\mathcal{F}_i = (X_i, \mathcal{E}_i)$ で座標表示したものは,

$$\tilde{x}_{i:i} := \varphi_{\mathcal{E}_i}(x_{i:i}), \quad P_i = X_i \hat{+} x_{i:i} \quad (7.7)$$

と書ける .

定義 25 (局所座標): このような, 自分自身の点を自分の枠で測った物体座標 $\tilde{x}_{i:i} \in \mathbb{R}^3$ を, 特に本書では局所座標 (local coordinate) と呼ぼう^{*13} .

定理 20: 変形しない剛体の局所座標 $\tilde{x}_{i:i} \in \mathbb{R}^3$ は, 常に定ベクトルとなる .

すなわち, 剛体上のある 1 点を指す局所座標は, 剛体の運動状態とは無関係に, 常にその点を指し続ける .

このような局所座標の性質を利用すれば, 剛体の形状 (構成粒子の配置) を定ベクトルとして保持できる . したがって, 剛体の形状を表わす数値としては, 局所座標が最も便利である . こうして機能 (2) が実現される .

ここでは, 運動学の最も標準的な手続きに準じて, 剛体を空間の部分集合としてモデル化したが, そこには, 剛体の構成粒子が運動によって更新されるという不自然さがあった . 局所座標に着目すれば, 物理的な構成粒子の一体感も自然に回復する .

^{*12} または Dehavitt-Hartenberg の変換行列ともいう .

^{*13} 一般的な用語の使い方とは言えないので, 他書を読む場合には注意されたい .

Multibody Dynamics

(第8回 ロボット機構学)

吉田勝俊

2006年12月15日

以降，執筆中．．．