Multibody Dynamics

吉田勝俊

2006 年 11 月 17 日

目　次

Multibody Dynamics
(第 1 回 空想と論理)

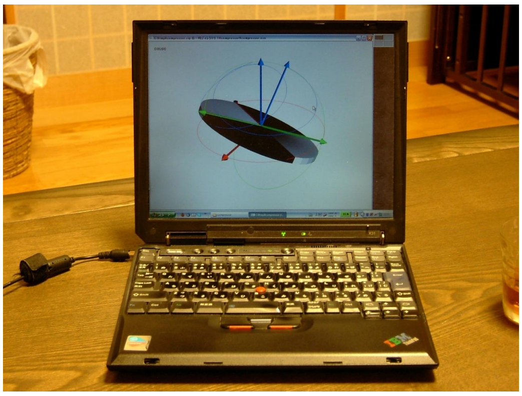
吉田勝俊

2006 年 10 月 6 日

空想を客観的に行うための常套手段を導入する．

§1　仮想現実と文字操作

回転する円盤の力学シミュレーションである．



この仮想円盤の実体はソフトウェアであり，ソフトウェアは文字情報からなる．詩歌や小説の例をひくまでもなく，文字情報の操作においては，いかなる空想も可能である．ディスプレイ上をまことしやかに運動する円盤ではあるが，それが現実の反映である保証はどこにもない．

意外かもしれないが，数式とて例外ではない．数式もまた文字情報であるから，それ相応の工夫がないかぎり，私的な妄想に陥いる危険性は十二分にある．

§2　公理的方法

客観的な空想のために，次のような手順を導入する．

1. 何も書いてない白紙を用意する．
2. そこに少数の基本ルールを書きこむ．
3. 以降，この白紙には，基本ルールと整合する主張しか書き足さない．

このような方法を，公理的方法という．

- 最初に定める基本ルールを定義，公理などと呼び，□印を付けて表わす．
- 基本ルールと整合した 2 次ルールを，定理，公式，命題，補題などと呼び，■印で表わす．

整合性のチェックには，数理論理学を使う．

§3　数理論理学

力学現象と矛盾しない，論理の操作方法を導入する．

□定義 1 (真理値): 真偽の定まった文章を命題という．

- 命題 P が真であることを $P = 1$ と表わす．
- 命題 P が偽であることを $P = 0$ と表わす．

このような真偽を表わす値 $1, 0$ を真理値という．

□定義 2 (論理記号): 命題 P，Q から別の命題を作るルールを 4 つ定める．

(1)　論理和 (または)

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(2)　論理積 (かつ)

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(3)　否定 (でない)

P	$\neg P$
1	0
0	1

(4)　条件命題 (ならば)

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

このような，真理値を並べた表を，真理表という．

(4) の定義に違和感を憶えるひとが多いと思う．(4) に対応する日常の論理を挙げておく．例えば，次の掲示は本当か嘘か？

$\boxed{\text{雨の日} \Rightarrow \text{休講とする}}$

雨の日 ($P = 1$) に，休講したら ($Q = 1$) 掲示は本当 ($P \Rightarrow Q = 1$) だが，授業したら ($Q = 0$) 掲示は嘘 ($P \Rightarrow Q = 0$) である．ところが，雨以外の日 ($P = 0$) に休講しても ($Q = 1$)，授業しても ($Q = 0$)，掲示に嘘はない ($P \Rightarrow Q = 1$)．この状況は (1)〜(3) では表せないから，それ用の (4) が用意される．

いや違う，$P \Rightarrow Q$ の論理は 1,0,0,1 であるべきだとさらに粘りたい諸君は，次の記号を定義して使うべし．

□定義 3: $P \Leftrightarrow Q \overset{\text{定義}}{\iff} (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q)$ と定める．$P \Leftrightarrow Q$ を**双条件命題**という．

何もなかった世界に，3つの□ (定義 1,2,3) が設置された．この世界に整合する最初の「■」を導いてみる．

■定理 1 (双条件命題): 双条件命題 $P \Leftrightarrow Q$ について，次の真理表が成立する．

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

例 1: □定義 1, 2, 3 を前提に定理を示せ．

□定義 4 (同値記号): 真理値または真理表が一致する命題を，同値であるといい，$P \Leftrightarrow Q$ または $P \equiv Q$ と書く．

■定理 2 (論理の算法): その他いろいろ，同様に示せる．

(a) $P \vee P \equiv P, \quad P \wedge P \equiv P.$ (累同則)
(b) $P \vee Q \equiv Q \vee P,\ P \wedge Q \equiv Q \wedge P.$ (交換則)
(c) $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R,$
$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R.$ (結合則)
(d) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$ (分配則)
(e) $\neg\neg P \equiv P.$ (二重否定)
(f) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q,\ \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q.$ (ド・モルガン)
(g) $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P).$ (対偶)

例 2: □定義 1, 2, 4 を前提に (d) を示せ．

Report 1: □定義 1, 2, 4 を前提に (g) を示せ．

§4 限定記号

命題 P の真理値が変数 x に依存するとき，P を命題関数と呼び $P(x)$ などと書く．例えば，

- $P(x) :=$“x は光合成する” について，P(焼き鳥) は偽，P(生レタス) は真．

このように，命題関数 $P(x)$ の真理値を確定させるには，変数 x に具体的な定数を代入すればよいが，もう 1 つの方法として，限定記号を用いる方法がある．

□定義 5 (限定記号): $P(x)$ を命題関数とする．

$\forall x : P(x) \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 全ての (任意の) x について $P(x)$ は真である．

$\exists x : P(x) \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $P(x)$ を真にするような x が (少くとも 1 つ) 存在する (選べる)．

記号 $\forall$ を**全称記号**，$\exists$ を**存在記号**という．これらを総称して限定記号という．

限定記号付きの命題の否定を作るには，それぞれ，

$$\begin{cases} \neg(\forall x : P(x)) & \equiv & \exists x : \neg P(x) \\ \neg(\exists x : P(x)) & \equiv & \forall x : \neg P(x) \end{cases} \tag{1}$$

とすればよい．「全ての x で $P(x)$ である」が嘘になるには，$P(x)$ でない x が少くとも 1 つあればよい．

§5 全体集合という空想

以上に導入した公理的方法を使って，紙に書ける空想物としての力学を構成していくが，そのような空想物の収容場所として，集合なるもの[*1]を導入しておく．

□定義 6 (集合): そこに属すかどうかが明確に定められた事物の集まりを，集合という．

- x が集合 X の元[*2]であることを，$x \in X$ と書く．
- 元でないことを $x \notin X$ と書く．

$x \in X$ は命題であり，$x \notin X \equiv \neg(x \in X)$ がいえる．

この定義により，全ての集合演算は，数理論理学に帰着する．試しに集合論の公式 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を証明してみよう．そのために次の定義をおく．

(1) $(x \in A \wedge x \in B)$ を，$x \in A \cap B$ と表記する．
(2) $(x \in A \vee x \in B)$ を，$x \in A \cup B$ と表記する．
(3) $(x \in A \iff x \in B)$ を，$A = B$ と表記する．

このとき，

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff (x \in A) \wedge (x \in B \cup C) \ \because (1) \\ &\iff \underbrace{(x \in A)}_{P} \wedge \Big(\underbrace{(x \in B)}_{Q} \vee \underbrace{(x \in C)}_{R} \Big) \ \because (2) \\ &\iff \big(P \wedge Q\big) \vee \big(P \wedge R\big) \ \because \text{定理 } 2\ \text{(d)} \\ &\iff \big(x \in A \cap B\big) \vee \big(x \in A \cap C\big) \ \because (1) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \ \because (2) \end{aligned}$$

ゆえに $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$．(3) よりこれは $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を意味する．証明おわり．

定義 6 によれば，具体的な集合を与えるときに，要素を全て列挙してみせる必要はない．集合に入る入らないの基準さえあれば，それは集合と見なせる．

その結果，全体集合という空想が正当化される．例えば「2×2 行列の全体集合」といったときに，無限個ある 2×2 行列を全て列挙してみせることはできないが，2×2 行列かどうかは誰にでも判別できるので，その全体集合が定義できる．同様にして，自然数，実数，複素数のそれぞれ全体集合 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ などを定義できる．

- 「x は実数」という命題は，$x \in \mathbb{R}$ と書ける．

その他，実数の n 個組 $(x_1, \cdots, x_n)$ の全体を $\mathbb{R}^n$ と書く．

[*1] これまた空想物．
[*2] 元=要素．

Multibody Dynamics
(第 2 回 筆算用のベクトル)

吉田勝俊

2006 年 10 月 13 日

物理ベクトルとは全く別の方法で，紙に書ける空想物としてのベクトルを構成したい．

§1　筆算用のベクトル

大きさと方向を持ち，矢印で図示され，太字 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ で書かれるべきもの．これが我々の脳裏にある最も素朴なベクトル像であろうか．

ベクトルの便利さは，それが物理的には力ベクトルだろうが，位置ベクトルだろうが，全く同じ算法が使えるところにある．ようするに，「ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$」という空想の本質は，それ自体よりもむしろ，その算法の側にある．

そこで，ベクトルかどうかの判定基準を，次の 8 つの算術公式に集約してしまうのが現代の常套手段である．

□定義 7 (線形空間): 加法 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$，スカラ倍 $\lambda \boldsymbol{x}$，等号 $=$ について，次の 8 公式が使える太字 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$ の全体集合 L を，**線形空間** (linear space) という．

- (L1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (交換則)
- (L2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (結合則)
- (L3) 零ベクトル $\mathbb{O}_L$ が使えて，どんな $\boldsymbol{x}$ でも，
  $\boldsymbol{x} + \mathbb{O}_L = \mathbb{O}_L + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (零元の存在)
- (L4) どんな $\boldsymbol{x}$ にも，逆ベクトル $\overline{\boldsymbol{x}}$ が作れて，
  $\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{x} = \mathbb{O}_L$. (逆元の存在)
- (L5) $\lambda(\mu \boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$
- (L6) $1 \in \mathbb{R}$ の作用は，$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
- (L7) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{x}$
- (L8) $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}$

線形空間の元を，**ベクトル** (vector) という．逆元 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を $-\boldsymbol{x}$ とも書く．線形空間をベクトル空間ともいう．加法とスカラ倍を**線形演算** (linear operation) と総称する．

定義 7 のベクトルは具体形が不明だが，加法 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$，スカラ倍 $\lambda\boldsymbol{x}$, 等号 $=$, 零元 $\mathbb{O}$, 逆元 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を用いた式変形 (L1)〜(L8) が可能である．式変形だけで何が分かるのか，□定義 7 と整合する有名な「■」を挙げておこう．

■定理 3 ($0, -1 \in \mathbb{R}$ の作用): V を線形空間とする．

- $0 \in \mathbb{R}$ の作用は，$0\boldsymbol{x} = \mathbb{O}_L$ for $\forall \boldsymbol{x} \in L$.
- $-1 \in \mathbb{R}$ の作用は，$(-1)\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}}$ for $\forall \boldsymbol{x} \in L$.

Report 2: 定義 7 との整合性を示せ．

§2　幾何ベクトル

定義 7 のベクトルはあくまで紙面上の筆算用であり，このままでは外界と何ら関連を持たない．筆算と外界をつなぐ基本ルールを追加しよう．

□定義 8 (幾何ベクトル): V を有向線分の全体集合とする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ の間の算法を 3 種類導入する．

(1) **等号：** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の向きと長さが等しい．長さ 0 のときは方向によらず等しいと定める．

(2) **加法：** $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x}$ の終点を $\boldsymbol{y}$ の始点としたとき，$\boldsymbol{x}$ の始点から $\boldsymbol{y}$ の終点に向う有向線分.

(3) **スカラ倍：** $\lambda\boldsymbol{x} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{x}$ の長さを λ 倍した有向線分.

等号と線型演算 (1)〜(3) が付与された有向線分 $\boldsymbol{x} \in V$ を，**幾何ベクトル** (geometric vector) という．その全体集合を幾何ベクトル空間という．

□公理 1: 幾何ベクトル空間 V は，線形空間をなす．

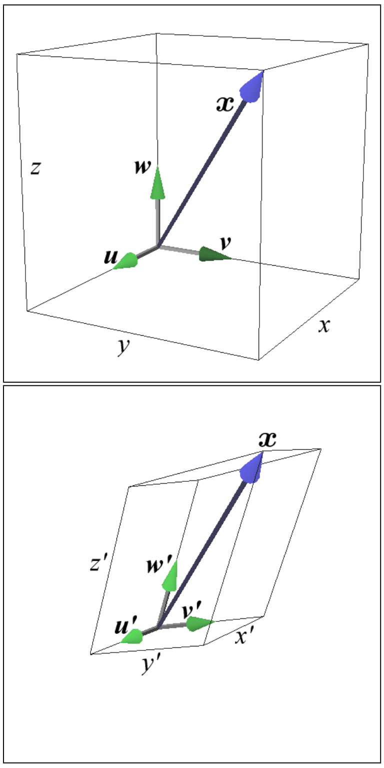
この公理の信憑性は紙の上では検証できない．物理的な検証実験を行なう以外にない．公理的方法では，このような紙面上では検証できない基本法則を，基本ルール□に位置付けて話を進める．

Exercise 1 V における (L2) の成立を，図形的に示せ．

§3　幾何ベクトルの直線座標

幾何ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ は図形であり，間違っても数値の組 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ではない．このような図形を数値化するには，別途，**座標** (coordinate) という人為的概念が必要になる．

多くの力学書で暗黙に使われている幾何ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ の座標とは，図形的には $\boldsymbol{x} \in V$ を対角線とする「平行６面体の 3 辺の寸法」のことである．



左右の寸法 $(x, y, z)^T$, $(x', y', z')^T \in \mathbb{R}^3$ は互いに数値が異なるが，いずれも幾何ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ の座標である．このように，どんな平行 6 面体を使うかによって座標は変化する．特に直方体で測った座標を**直交座標**，それ以外を**斜交座標**といい，両者を**直線座標**と総称する．

Multibody Dynamics
(第 3 回 ベクトルの成分表示)

吉田勝俊

2006 年 10 月 20 日

§1 座標写像

図 1 に示すような，平行 6 面体 $\mathcal{P}$ による測定操作を，次のように模式化する．

$$V \ni \boldsymbol{x} \xrightarrow{\text{測定操作 } \varphi_{\mathcal{P}}} \widetilde{\boldsymbol{x}} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

つまり，測定操作 $\varphi_{\mathcal{P}}$ は，図形 $\boldsymbol{x} \in V$ に数ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3$ を割り当てる $\mathbb{R}^3$ 値関数としてモデル化できる．

測定操作 $\varphi_{\mathcal{P}}$ を筆算できるようにするため，平行 6 面体そのものではなく，平行 6 面体の 3 辺に沿った単位幾何ベクトルの組 $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ をとる．別の平行 6 面体なら $\mathcal{B}' = \langle \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}' \rangle$ 等々である．このようなベクトルの組 $\mathcal{B}$ や $\mathcal{B}'$ を，V の**基底**という．特に，単位立方体の 3 辺からなる基底 $\mathcal{E} \equiv \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ を**正規直交基底**という．どんな $\boldsymbol{x} \in V$ でも，基底の線形結合で，

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w} \quad = x'\boldsymbol{u}' + y'\boldsymbol{v}' + z'\boldsymbol{w}' \qquad (2)$$

と書けるが, 基底 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$, $\langle \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}' \rangle$ がそれぞれの平行 6 面体の取り方を表わし, 展開係数 $(x, y, z)^T$, $(x', y', z')^T$ が $\boldsymbol{x} \in V$ の各座標となる．このような基底と係数の関係に着目すると，幾何ベクトルから座標を採取する操作を数学的に定式化できる．

□定義 9 (座標写像): 幾何ベクトル空間 V から，基底 $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ を 1 つ選んで固定する．$\boldsymbol{x} \in V$ を $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w}$ と展開したときの係数 $x, y, z \in \mathbb{R}$ を見つける操作：

$$\varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}(x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w}) \equiv \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] \quad \in \mathbb{R}^3$$

を，$\mathcal{B}$ が定める**座標写像** (coordinate map) と呼ぶ．$\boldsymbol{x} \in V$ に対する $\widetilde{\boldsymbol{x}} \equiv \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$ を，$\mathcal{B}$ で測った $\boldsymbol{x} \in V$ の**座標** (coordinate) もしくは**成分** (component) という．x_i を成分とする $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3$ を，$\widetilde{\boldsymbol{x}} = [x_i]$ と書く．

このように，幾何ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ と座標 (ベクトル) $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}) = [x_i] \in \mathbb{R}^3$ は全くの別物である．$\boldsymbol{x} \in V$ は基底と同列に存在できるが，$\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3$ は基底が無いと定義すらできない．

例 3: $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ で測った $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in V$ の座標を求めよ．

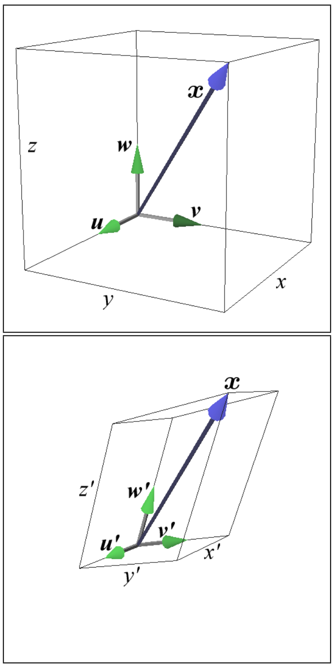


図 1　ベクトルの座標

(1) $2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boxed{?}\boldsymbol{u} + \boxed{?}\boldsymbol{v} + \boxed{?}\boldsymbol{w}$ の空欄を埋めると，$2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = 0\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + 1\boldsymbol{w}$ となる．

(2) 係数を抜き出して，$\varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}(0\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + 1\boldsymbol{w}) = (0, 2, 1)^T$ を得る．

Exercise 2 同じ $\boldsymbol{x}$ について，$\mathcal{B}' = \langle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ で測った座標 $\varphi_{\mathcal{B}'}(\boldsymbol{x})$ を求めよ．$2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boxed{?}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + \boxed{?}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boxed{?}\boldsymbol{w}$ の空欄を埋めればよい．

■定理 4 (座標写像の線形性): 数ベクトルの算法を前提に，次が示せる．

- $\varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{y})$.
- $\varphi_{\mathcal{B}}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x})$.　$(\lambda \in \mathbb{R})$

§2 基底の公理

以上，基底と座標を直感的に導入したが，このままだと問題が起きる．例えば，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が同一平面内にあると，その外にあるベクトルの座標が測れない．このような病的状況を排除するために，次の定義を採用する．

□**定義 10 (基底):** 次の 2 条件を満足するベクトルの組 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ を，V の**基底** (basis) といい，$\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ などと書く．

(1) どんな $\boldsymbol{x} \in V$ でも $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w}$ と書ける．
(2) そのときの係数 $x, y, z \in \mathbb{K}$ の決まり方が一意である (成分表示の一意性)．

基底を作るのに必要なベクトルの個数を V の**次元** (dimension) といい $\dim V$ と書く．

基底でない例を挙げる．$\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ に $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ という付帯条件をつけよう．このとき $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は同一平面内にある．ここで試しに $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ をとると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} &= 3\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{w} \\ &= 0\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w} \end{aligned}$$

などなど，係数が一意に決まらないので，このような $\mathcal{B}$ は基底ではない．

§3 基底の回転

基底を回したときの座標変換を与えておく．単位ベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ を回転軸として，$\boldsymbol{x} \in V$ を角度 θ だけ回す変換を $R_{\boldsymbol{a}:\theta}$ と書くと[*3]，回転後のベクトルは，

$$\boldsymbol{y} = R_{\boldsymbol{a}:\theta}(\boldsymbol{x}) \qquad \in V \tag{3}$$

と書ける．ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ を直交座標で $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \varphi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x})$，$\widetilde{\boldsymbol{y}} = \varphi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^3$ と表わすと，回転変換による座標の変化は，適当な 3×3 行列 $[R_{\boldsymbol{a}:\theta}]$ と数ベクトルの積によって，

$$\widetilde{\boldsymbol{y}} = [R_{\boldsymbol{a}:\theta}]\, \widetilde{\boldsymbol{x}} \qquad \in \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

と書ける．3×3 行列 $[R_{\boldsymbol{a}:\theta}]$ を，回転変換 $R_{\boldsymbol{a}:\theta}$ の行列表示，もしくは**回転行列**という．正規直交基底に対する成分を求めてみると[*4]，($\sin\theta = S_\theta$，$\cos\theta = C_\theta$ と略記)

$$[R_{\boldsymbol{a}:\theta}] = \begin{bmatrix} \alpha^2 + (1-\alpha^2)C_\theta & \alpha\beta(1-C_\theta) - \gamma S_\theta & \alpha\gamma(1-C_\theta) + \beta S_\theta \\ \alpha\beta(1-C_\theta) + \gamma S_\theta & \beta^2 + (1-\beta^2)C_\theta & \beta\gamma(1-C_\theta) - \alpha S_\theta \\ \alpha\gamma(1-C_\theta) - \beta S_\theta & \beta\gamma(1-C_\theta) + \alpha S_\theta & \gamma^2 + (1-\gamma^2)C_\theta \end{bmatrix} \tag{5}$$

となる．ただし α, β, γ は，回転軸 $\boldsymbol{a} \in V$, $\|\,\boldsymbol{a}\,\| = 1$ の座標 $\varphi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{a}) = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ である．

■**定理 5 (基底の回転):** $R_{\boldsymbol{a}:\theta}$ で回転させた基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ を，$R_{\boldsymbol{a}:\theta}(\mathcal{E}) \equiv \langle R_{\boldsymbol{a}:\theta}(\boldsymbol{i}), R_{\boldsymbol{a}:\theta}(\boldsymbol{j}), R_{\boldsymbol{a}:\theta}(\boldsymbol{k}) \rangle$ と書くとき，

$$\varphi_{R_{\boldsymbol{a}:\theta}(\mathcal{E})}(\boldsymbol{x}) = [R_{\boldsymbol{a}:\theta}]^{-1} \varphi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x}) \quad ([R_{\boldsymbol{a}:\theta}]^{-1} = [R_{\boldsymbol{a}:-\theta}]) \tag{6}$$

となる．すなわち，ある幾何ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ について，回転後の基底 $R_{\boldsymbol{a}:\theta}(\mathcal{E})$ で測った座標は，回転前の基底 $\mathcal{E}$ で測った座標を逆回転させた座標に等しい．$[R_{\boldsymbol{a}:\theta}]^{-1}$ を，基底の回転 $\mathcal{E} \to R_{\boldsymbol{a}:\theta}(\mathcal{E})$ に伴う**座標変換行列**という．

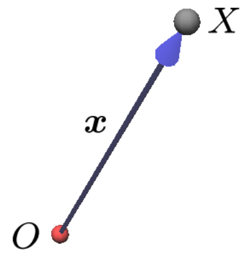
Exercise 3 定理の「すなわち」以降を，$\boldsymbol{x} \in V$ を風景，基底をカメラ，座標を映像に言い換えて述べよ．

§4 空間座標

以上を応用すると，空間の点の座標を測ることができる．我々が住むこの物理空間を $\mathcal{A}$ と書き，$\mathcal{A}$ は点集合であると仮定する[*5]．ここで，物理空間の点 $X \in \mathcal{A}$ の配置を記録するには，

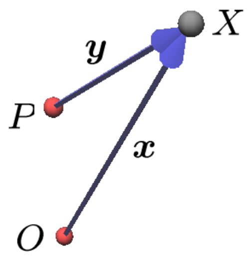
1. 物理空間に原点 $O \in \mathcal{A}$ を定める．
2. 原点 $O \in \mathcal{A}$ から点 $X \in \mathcal{A}$ に向う幾何ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ をとる．

という操作を実行すればよかろう．



こうして定めた $\boldsymbol{x} \in V$ を，$O \in \mathcal{A}$ で定まる $X \in \mathcal{A}$ の**位置ベクトル** (position vector) と呼ぶ．このベクトルの成分 $\widetilde{\boldsymbol{x}} \equiv \varphi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3$ が，空間の点 $X \in \mathcal{A}$ の座標である．

ただし，同じ $X \in \mathcal{A}$ を別の原点 $P \in \mathcal{A}$ で測ると，$\boldsymbol{x}$ だった位置ベクトルが $\boldsymbol{y}$ に変化し，したがって座標も変化してしまう．



のみならず，原点が同じでも基底を取り換えれば，これまた別の座標値が得られる．

ということで，空間の点の座標を確定させるには，原点 $O \in \mathcal{A}$ と基底 $\mathcal{E}$ のペアを固定しなければならない．このペア $(O, \mathcal{E})$ を**座標系**という．

[*3] 我々はドアノブの回転を知っている．あの回転である．具体的な算法は??章 (p??) で構成する．

[*4] 回転変換が同じでも使う基底によって行列の成分が変わる．成分の求め方は ?? (p??) 参照．

[*5] 点集合と仮定することの是非は本書では問わない．点集合と仮定しない宇宙論もあるようである．

Multibody Dynamics
(第 4 回 直線座標系)

吉田勝俊

2006 年 10 月 27 日

§1　筆算用の内積

我々の幾何ベクトル空間 V では，まだ，長さと直交性を筆算できない．これらは内積として一括導入できる．

□**定義 11 (内積):** 次の法則で計算可能なベクトルの積 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}$ を，一般に**内積** (inner product) という．

(I1) 双線形性： $\boldsymbol{x}\cdot(\lambda\boldsymbol{y}+\mu\boldsymbol{z})=\lambda(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})+\mu(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})$,
$(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}=\lambda(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})+\mu(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z})$.
(I2) 対称性： $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$.
(I3) 正定値性： $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\geq 0$. 特に $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\mathbb{O}_V$.

ここに，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$.

■**定理 6:** $\boldsymbol{x}=\mathbb{O}_V \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=0$ for $\forall\boldsymbol{a}\in V$.

証明は付録参照.

□**定義 12 (ノルム):** $\|\boldsymbol{x}\|:=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}$ を，ベクトル $\boldsymbol{x}\in V$ の**ノルム** (norm) または**長さ**という．

□**定義 13 (直交性):** $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}\in V \overset{\text{定義}}{\iff} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$.

■**定理 7 (物理空間の内積):** $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ を 2 辺とする三角形に余弦定理 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2-2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta$ が成立するとき，定義 11 の内積の値は,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\,\cos\theta$$

に等しい．ただし θ は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のなす角.

ヒント) 内積の算法と余弦定理が両立するには？

§2　内積の数値計算

□**定義 14 (正規直交基底):** 基底 $\mathcal{E}:=\langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\rangle$：

$$\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j=\delta_{ij}\equiv\begin{cases}1 & \text{if } i=j. \quad (\text{正規性})\\ 0 & \text{if } i\neq j. \quad (\text{直交性})\end{cases}$$

を，**正規直交基底** (orthonormal basis) という．δ_{ij} をクロネッカーのデルタ (Kronecker's delta) という．正規直交基底で測った座標を**正規直交座標**という．

■**定理 8 (内積の値):** 内積 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ の数値は，正規直交座標 $\widetilde{\boldsymbol{x}}=\varphi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x})$, $\widetilde{\boldsymbol{y}}=\varphi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{y})$ の標準的な内積に一致する．

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\langle\,\widetilde{\boldsymbol{x}}\,,\;\widetilde{\boldsymbol{y}}\,\rangle:=\sum_{i=1}^{3}x_iy_i$$

ヒント) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ は基底 $\mathcal{E}$ の線形結合で，それぞれ，$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2+x_3\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{u}_1+y_2\boldsymbol{u}_2+y_3\boldsymbol{u}_3$ と書ける．$(x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2+x_3\boldsymbol{u}_3)\cdot(y_1\boldsymbol{u}_1+y_2\boldsymbol{u}_2+y_3\boldsymbol{u}_3)$ を双線形性で展開し，定義 14 (p4-1) で整理せよ．

したがって，正規直交座標 $[x_i]=\varphi_{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x})$ を使うと，長さは三平方の定理 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ で書ける．

§3　位置ベクトルの算法

我々が住むこの 3 次元空間を点集合 $\mathcal{A}$ と見なす．空間の点 $P\in\mathcal{A}$ の位置を，ベクトル $\boldsymbol{p}\in V$ で測量する．

□**定義 15 (平行移動):** そのために，空間の点 $P\in\mathcal{A}$ とベクトル $\boldsymbol{p}\in V$ のペアに，別の点を対応づける算法：

$$P\in\mathcal{A},\boldsymbol{p}\in V \implies P\,\hat{+}\,\boldsymbol{p}\in\mathcal{A}$$

(A1) $P\,\hat{+}\,\mathbb{O}_V=P$.
(A2) $(P\,\hat{+}\,\boldsymbol{p})\,\hat{+}\,\boldsymbol{q}=P\,\hat{+}\,(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})$.
(A3) $O,X\in\mathcal{A} \implies \exists!\boldsymbol{x}\in V$ s.t. $X=O\,\hat{+}\,\boldsymbol{x}$.

を導入する．算法 "$\hat{+}$" を**平行移動** (translation) という．この算法が使える点集合と線形空間のペア $(\mathcal{A},V)$ を，**アファイン空間**という．

□**定義 16 (位置ベクトル):** 原点 $O\in\mathcal{A}$ を定めると，$P\in\mathcal{A}$ は一意に,

$$P=O\,\hat{+}\,\boldsymbol{p} \qquad \because\ (\text{A3})$$

と書ける．このときの $\boldsymbol{p}\in V$ を, 原点 O で測った $P\in\mathcal{A}$ の**位置ベクトル** (position vector) という．

例 4 (原点の交換): $O\in\mathcal{A}$ から測った $P\in\mathcal{A}$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{p}\in V$，$P\in\mathcal{A}$ から測った $R\in\mathcal{A}$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}\in V$ とする．このとき，$O\in\mathcal{A}$ から測った $R\in\mathcal{A}$ の位置ベクトルを求めよ．

$P=O\,\hat{+}\,\boldsymbol{p}$ を $R=P\,\hat{+}\,\boldsymbol{r}$ に代入すると

$$\begin{aligned}R&=(O\,\hat{+}\,\boldsymbol{p})\,\hat{+}\,\boldsymbol{r}\\&=O\,\hat{+}\,(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}) \qquad \because\ (\text{A2})\end{aligned}$$

だから，$O\in\mathcal{A}$ から測った $R\in\mathcal{A}$ の位置ベクトルは $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}$ である．

Exercise 4　物理空間の 4 点 $O,P,Q,R\in\mathcal{A}$ が,

$$P=Q\,\hat{+}\,\boldsymbol{p},\ Q=O\,\hat{+}\,\boldsymbol{q},\ R=P\,\hat{+}\,\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}\in V$$

の関係にあるとき，$O\in\mathcal{A}$ から測った $R\in\mathcal{A}$ の位置ベクトル $\boldsymbol{v}\in V$ を求めよ．

□**定義 17 (空間座標):** $P = O \hat{+} \boldsymbol{p}$ とする．位置ベクトル $\boldsymbol{p} \in V$ の座標：

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}) \quad \in \mathbb{R}^3$$

を，原点 O と基底 $\mathcal{B}$ で測った $P \in \mathcal{A}$ の**空間座標** (spatial coordinate) という．原点を明示したいときは，$\widetilde{\boldsymbol{p}} = \varphi^O_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p})$ と書く．

略記法　簡単のため，内積をまねた略記法：

$$\widetilde{\boldsymbol{x}} \cdot \vec{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle := x_1 \boldsymbol{u} + x_2 \boldsymbol{v} + x_3 \boldsymbol{w}$$

を導入する．基底と座標の関係が，

$$\boldsymbol{x} = \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{\mathcal{B}} \quad (= x_1 \boldsymbol{u} + x_2 \boldsymbol{v} + x_3 \boldsymbol{w})$$

のように短かく書ける．ゆえに点 $P \in \mathcal{A}$ は，

$$P = O \hat{+} \boldsymbol{p} = O \hat{+} \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}) \cdot \vec{\mathcal{B}}$$

と書けて，$(O, \mathcal{B})$ を陽に記せて便利．以上，

$$P = O \hat{+} \widetilde{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \quad (= O \hat{+} \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}) \cdot \vec{\mathcal{B}})$$

と書けたときの $\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^3$ を，O と $\mathcal{B}$ で測った $P \in \mathcal{A}$ の空間座標という．

§4　直線座標系

定義 17 によれば，点 $P \in \mathcal{A}$ の座標 $\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^3$ が確定するには，原点 $O \in \mathcal{A}$ と基底 $\mathcal{B} \subset V$ のペアを指定する必要がある．このペアには名前がある．

□**定義 18 (直線座標系):** 基準点 $O \in \mathcal{A}$ と基底 $\mathcal{B} \subset V$ のペア $\mathcal{F} \equiv (O, \mathcal{B})$ を，**直線座標系** (linear coordinate system)，または**枠** (frame)，**フレーム**という．

例えば，$\mathcal{F} = (O, \mathcal{B})$ で測った $P \in \mathcal{A}$ の座標が $\widetilde{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^3$ であるとき，点 $P \in \mathcal{A}$ は，

$$P = O \hat{+} \widetilde{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\mathcal{B}} \quad = O \hat{+} \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}) \cdot \vec{\mathcal{B}}$$

と数式表現できる．

ある直線座標系 $(O, \mathcal{E})$ と，これを回転・平行移動した直線座標系 $(O \hat{+} \boldsymbol{r}, R(\mathcal{E}))$ を考える．(R は回転軸 $\boldsymbol{a} \in V$ まわりに角度 θ だけ回す変換)

■**定理 9 (直線座標系の回転と平行移動):** $P \in \mathcal{A}$ の空間座標が，直線座標系 $(O, \mathcal{E})$，$(O \hat{+} \boldsymbol{r}, R(\mathcal{E}))$ によって，それぞれ，

$$P \in \mathcal{A} \xrightarrow{\quad (O, \mathcal{E}) \quad} \widetilde{\boldsymbol{p}} \in \mathbb{R}^3$$

$$P \in \mathcal{A} \xrightarrow{\quad (O \hat{+} \boldsymbol{r}, R(\mathcal{E})) \quad} \widetilde{\boldsymbol{p}}' \in \mathbb{R}^3 \ ,$$

のように測られたとする．すなわち $O \hat{+} \widetilde{\boldsymbol{p}} \cdot \mathcal{B} = P = (O \hat{+} \boldsymbol{r}) \hat{+} \widetilde{\boldsymbol{p}}' \cdot R(\mathcal{B})$．このとき，

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{r}) + [R]\, \widetilde{\boldsymbol{p}}'$$

が成立する．

ヒント）定理 4 (p3-1)，定理 5 (p3-2)，定義 15 (p4-1) を使う．

$$\begin{aligned} P &= (O \hat{+} \boldsymbol{r}) \hat{+} \boldsymbol{p}' = O \hat{+} (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{p}') \quad \because \text{(A2)} \\ &= O \hat{+} \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{p}') \cdot \vec{\mathcal{B}} \quad \because \text{略記法} \\ &= O \hat{+} \Big(\varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{r}) + \varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}') \Big) \cdot \vec{\mathcal{B}} \quad \because \text{定理 } 4 \\ &= O \hat{+} \Big(\varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{r}) + \varphi_{R^{-1}R(\mathcal{B})}(\boldsymbol{p}') \Big) \cdot \vec{\mathcal{B}} \quad \because \text{逆写像} \\ &= O \hat{+} \Big(\varphi_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{r}) + [R] \varphi_{R(\mathcal{B})}(\boldsymbol{p}') \Big) \cdot \vec{\mathcal{B}} \quad \because \text{定理 } 5 \end{aligned}$$

§ 付録

定理 6 の証明　まず「$\boldsymbol{x} = \mathbb{O}_V \Longrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0,\ \forall \boldsymbol{a}$」を示す．$\boldsymbol{x} = \mathbb{O}_V$ を仮定すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \cdot \mathbb{O}_V = \boldsymbol{a} \cdot (0\boldsymbol{a}) &\quad 0 \in \mathbb{R} \text{ の作用 (p2-1)} \\ = 0(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) &\quad \text{(I1)} \\ = 0 &\quad \text{算数.} \end{aligned}$$

と計算できる．どんな $\boldsymbol{a}$ でも成立するから，題意を得る．

次に「$\boldsymbol{x} = \mathbb{O}_V \Longleftarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0,\ \forall \boldsymbol{a}$」を示すが，簡単のために，これと同値な対偶[*6]：

$$\neg(\boldsymbol{x} = \mathbb{O}_V) \implies \neg(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0,\ \forall \boldsymbol{a})$$

を示す．$\boldsymbol{x} = \mathbb{O}_V$ の否定は $\boldsymbol{x} \neq \mathbb{O}_V$，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 0,\ \forall \boldsymbol{a}$ の否定は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \neq 0,\ \exists \boldsymbol{a}$ であるから[*7]，次を示せばよい．

$$(\boldsymbol{x} \neq \mathbb{O}_V) \implies (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \neq 0,\ \exists \boldsymbol{a}) \qquad (*)$$

この $(*)$ は，$\boldsymbol{a}$ の存在を主張する命題である．一般に存在を証明するには，該当するものが実際に発見できればよい．つまり，試行錯誤的に $\boldsymbol{a}$ の候補を作り，それが条件を満せば証明完了である．

まず題意の通り $\boldsymbol{x} \neq \mathbb{O}_V$ を仮定する．ここで $\boldsymbol{a}$ の候補として試しに $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}$ をとる．このとき，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0 \quad \because \text{(I3) 正定値性}$$

となるが, (I3) の後半より $\boldsymbol{x} = \mathbb{O}_V$ の場合にしか $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ の可能性はないので，結局，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} > 0$ となり，この候補は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} \neq 0$ を満足する．

以上，具体的な $\boldsymbol{a}$ の見付け方 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}$ が判明したので，命題 $(*)$ は真である．ゆえに $\Longleftarrow$ の証明が完了した．

[*6] 定理 2 (p1-2) の (g).

[*7] 「全ての $\boldsymbol{a}$ で〜である」の否定は「〜でない $\boldsymbol{a}$ が少くとも一つある」になる．式 (1) (p1-2) 参照.

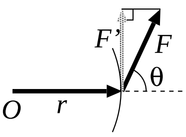
Multibody Dynamics
(第 5 回 回転と角速度)

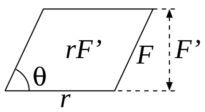
吉田勝俊

2006 年 11 月 18 日

§1　平行四辺形

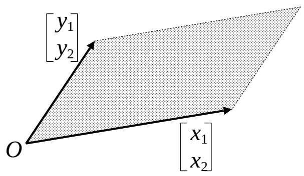
物理量には，図形的に，平行四辺形の面積であるものも少なくない．例えば，原点 O から r だけ離れた点に力 F が作用するとき，原点を回そうとする作用，すなわち**トルク** (torque) の大きさ S は，r と，F の回転方向成分 F' の積 $S = rF'$ として定義される．





$F' = F\sin\theta$ より $S = rF' = rF\sin\theta$ となり，S は r, F を 2 辺とする平行四辺形の面積である．

平面ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を $D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と表記しよう．その値を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の座標成分で書き下したい．



■定理 10:　平行四辺形の面積 $D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の正規直交座標 $[x_i], [y_i] \in \mathbb{R}^2$ からなる 2 次行列式,

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

に一致する．$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を一般に**符号付面積**という．

Exercise 5　示せ．(長方形から余計な三角形を除く)

例えば，冒頭の平面内のトルクは，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}$ の正規直交座標 $[r_i], [F_i] \in \mathbb{R}^2$ を用いて，$D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}) = r_1F_2 - F_1r_2$ と計算できる．

1 つ次元を上げて，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ を 3 辺とする平行六面体の体積を $D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ と書こう．

■定理 11:　平行六面体の体積 $D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ は，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ の正規直交座標 $[x_i], [y_i], [z_i] \in \mathbb{R}^3$ からなる 3 次行列式,

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

に一致する．$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を一般に**符号付体積**という．

§2　外積

平面上の符号付面積 $D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を，平面から引き剥して，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ に配置したものを，$\mathbb{R}^3$ の外積という．

□定義 19 (面ベクトル):　平面図形 $\mathcal{S}$ に垂直で，長さが $\mathcal{S}$ の面積 S に等しい幾何ベクトル $\boldsymbol{s} \in V$ を，S の**面ベクトル** (surface vector) という．

□公理 2 (面ベクトルの座標):　$\mathcal{E} := \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ を正規直交基底とする．面ベクトル：

$$\boldsymbol{s} = S_1\boldsymbol{u}_1 + S_2\boldsymbol{u}_2 + S_3\boldsymbol{u}_3$$

の直交座標成分 S_i は，基底ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を法線とする面に投影された $\mathcal{S}$ の正射影[*8] の面積に一致する．(正規直交基底について $S_i = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{u}_i$ に注意しておく)

Exercise 6　図示せよ．

□定義 20 (外積):　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ を 2 辺とする平行四辺形 $\mathcal{R}_{ab}$ の面ベクトル：

$$\boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \quad \in V$$

を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積** (cross product) と呼ぶ．$\boldsymbol{s}$ の向きは，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ回した右ねじの進行方向とする (右手系)．

平行四辺形 $\mathcal{R}_{ab}$ の正射影は平行四辺形だから，外積の座標は符号付面積で書ける．$\boldsymbol{a} = [\alpha_i] \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\boldsymbol{a}_1 := \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 := \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

と表記する．

■定理 12 (外積の座標):　外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の正規直交座標は,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{u}_1 + D(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{u}_2 + D(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3)\boldsymbol{u}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{u}_1 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{u}_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{u}_3 \end{aligned} \tag{8}$$

と書ける．

■定理 13 (外積の基本法則):　次の公式が成立する．

(O1) 双線形性：　$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) + \mu(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$,
$\boldsymbol{a} \times (\lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \mu(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$.

[*8] 投影面に垂直な平行光線による射影を正射影（または直交射影，orthogonal projection）という．

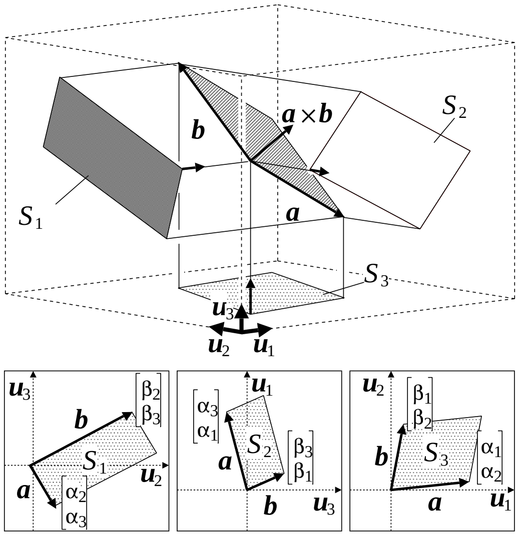


図 2　外積の座標

(O2) 歪対称性：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$．ゆえに $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\mathbb{O}_V$．

(O3) 正規直交基底 $\langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\rangle$ について，
$\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_3\times\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_2$．

■命題 14 (三重積と四重積):　力学に便利な公式たち．

(O4) スカラ三重積：　　　※ D は符号付体積
$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$．

(O5) ベクトル三重積：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$，
$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$．

(O6) ベクトル四重積：
$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))=\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))$．

Exercise 7　数式処理で (O1)〜(O6) の成立を示せ．

§3　回転変換と角速度

□公理 1 (回転変換):　単位ベクトル $\boldsymbol{a}\in V$ を回転軸として，$\boldsymbol{x}\in V$ を角度 θ だけ回転させる変換は，
$R_{a:\theta}(\boldsymbol{x}):=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}+\cos\theta\big(\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}\big)+\sin\theta\big(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}\big)$
と書ける．（内積，外積の幾何と，図 3 の作図による）

■定理 15 (角速度):　回転軸 $\boldsymbol{a}\in V$ ($\|\boldsymbol{a}\|=1$) に，回転角の変化率 $\dot\theta=\frac{d}{dt}\theta\in\mathbb{R}$ を乗じた幾何ベクトル：

$$\boldsymbol{\omega}:=\dot\theta\boldsymbol{a}\quad\in V$$

を**角速度** (angular velocity) という．点 $O\in\mathcal{A}$ を中心に角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する点 $P=O\hat{+}\boldsymbol{x}$ の速度は，

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}$$

と書ける．

ヒント）角度 θ だけを時間の関数 $\theta=\theta(t)$ と見て，回転変換 $\boldsymbol{y}(t)=R_{a:\theta(t)}(\boldsymbol{x})$ を時間微分すると，
$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\mathbb{O}-\dot\theta\sin\theta\big(\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}\big)+\dot\theta\cos\theta\big(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}\big)$
だが，作図より $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\dot{\boldsymbol{y}}(t)|_{\theta=0}$．

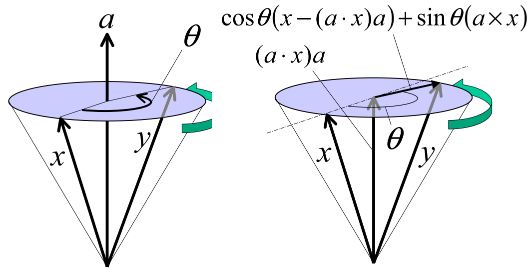


図 3　回転変換

■定理 16 (角速度の加法性):　$O\in\mathcal{A}$ を中心に $\boldsymbol{\omega}_1\in V$ で回転する剛体[*9] を，同時に $\boldsymbol{\omega}_2\in V$ でも回転させる (O は同じ)．このとき，剛体上の点 P の角速度は，ベクトルの加法で $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2\in V$ と書ける．

ヒント）$P=O\hat{+}\boldsymbol{x}$ の速度は $\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{x})$．

§ 付録

以下の基本ルール (□) を用いると，行列式を使わないで $D(\cdots)$ のまま筆算できる．

□公理 3 (符号付面積):　$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^2$ とする．

(1) 双線形性 (2 重線形性)：
$D(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\lambda D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\mu D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$，$D(x,\lambda y+\mu z)=\lambda D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\mu D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$．

(2) 歪対称性 (わいたいしょうせい)：$D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=-D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$．ゆえに $D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$．

(3) 単位面積：正規直交基底 $\mathcal{E}=\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\rangle$ について，$D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=1$．

以上に従う $D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を，**符号付面積** (signed area) と呼ぶ．

□公理 4 (符号付体積):　$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$ とする．

(1) 3 重線形性：
$D(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\lambda D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)+\mu D(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$，
$D(\boldsymbol{x}_1,\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_3)=\lambda D(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_3)+\mu D(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_3)$，
$D(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y})=\lambda D(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x})+\mu D(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})$．

(2) 歪対称性 (任意の 2 つを入れ替えると符号が反転)：
$D(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=-D(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3)$
$=-D(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_2)=-D(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)$．
ゆえに $D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=0$．

(3) 単位体積：正規直交基底 $\mathcal{E}=\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\rangle$ について，$D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=1$．

この $D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を，**符号付体積** (signed volume) という．

公理 4 を前提に定理 11 が証明できる．$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{e}_1+\cdots$ 等を代入し整理せよ．

[*9] それ上の任意の 2 点間の距離が変化しない物体を，**剛体** (rigid body) という．

以降，執筆中・・・