解くための

材 料 力 学

吉田 勝俊

DTP 版 (2010.10.1)

はじめに

本書は材料力学の教科書ではない．いわゆる教科書でいうところの「真直はりのたわみ曲線」に特化した算術教本である．仮定する知識は高校数学＋α．本書をこなせば，少くとも，教科書レベルの例題なら最小限の暗記で 100 ％解ける．せっかく身につけた微分積分を，はりの計算にも使おうというのが主旨である．そのための算法を講義しだして数年，身近な学生諸君にはおおむね好評である．

本書の方法では，まず全ての荷重を数式表現してしまう．あとは 4 回積分するだけ．これで，たわみ曲線まで一気に求まる．このような算法を採用したのは，著者自身が材料力学の学習に 2 度も失敗したからである．

1 度目は学生時代．とりわけ，せん断力や曲げモーメントを細心の注意でたどるのが億劫だった．例えばこんな具合である．

> えっとまず反力があって，そのままきて，モーメント荷重は無視 (??) して，
> 集中荷重を足し … 引くんだっけ … ん？

何がプラスでマイナスか．それこそ，SFD や BMD を描き終える前にトイレにでも立ったら最後，もう分らない．最初からたどり直さないといけない．そして，さしたる確証もなく得られた曲げモーメントを，さらに手間暇かけて 2 回積分することに強い抵抗を感じた．最後の気力をふり絞り，答えを見ると間違ってる．もういやだ．これが著者の学生時代であった．

そして 2 度目は教師 3 年目．機械設計関連の講義担当を命ぜられ，久々に材料力学を復習したのだが，1 週間以上たっても「こころ」がつかめない．何たる不覚．なにせ材料力学は機械系学科の初年度級科目である．そこの教師が，分からないので暗記しましたでは済まされない．ぞっとした．

そうこうするうちにも講義はせまる．もだえまくりの熟考数日，そっと小悪魔が囁いた．なんなら自己流って手もあるぜ？ — と，それから，週刊誌の連載作家のごとき突貫工事で構成していったのが本書の内容である．素人の著者が自分で分るように勉強したら，なにやらこうなってしまった．

本書では，材料力学の計算に振動論や制御理論の算術を使う．集中荷重をデルタ関数で数式表現すると自然にそうなる．こうすると，はりにかかる全ての荷重が一本の式で書ける．あとは 4 回積分するだけで一気にたわみ量まで求まる．最大の利点は，計算の各段階で物理と数学が 1 対 1 に対応することで，思考過程が数式として残るから，途中で席を立っても頭はこんがらがらない．この方法は，工学部初年度級の微積分学を修めた人 (たとえ成績は最低でも) には，かえって無理がないと察する．

ところで，誤解がないよう強調しておくが，本書の方法は決して突飛でもマニアッ

クでもない．それが証拠に，本物の教科書を読み返してほしい．本書と同じことが言葉で書かれているはず．4 回積分する方法にしても本書の専売特許ではない．理工学の標準算法である．同趣旨の算術本が他にあって不思議ないのだが，なぜ無いんだろう？

ただ 1ヶ所だけ，モーメント荷重を集中せん断力と解釈するあたりが気になるといえば気になる．なぜなら，本物の材料力学の教科書には，デルタ関数状の SFD はまず出てこないのである．答えは合うし算術的にも問題ないと思うのだが，現象の理解という面ではどうなのか，門外漢の著者には見当がつかないので，この点については読者の叱正批判を待つより他ない．お気付きの点をぜひ著者までお寄せ下さい．

最後に，恩師である宇都宮大学工学部機械システム工学科の佐藤啓仁教授に心からの敬意と謝意を表します．また，同大学院生，大川洋之君，齋藤慶一君，新関亘君，橋本浩之君をはじめ，その他多くの学部生・院生諸君には，学習者の立場から的確な御批判を頂き，教える側の認識不足を詳細に補って頂いた．心から御礼申し上げるとともに，諸君の活躍を確信する．

平成 15 年 5 月 13 日

吉田勝俊

本書の構成

本書は 2 部構成をとる．第 I 部は本編「解くための材料力学」であり，初等的な計算力の養成を念頭に構成した．

0 章〜2 章は，予備知識の確認用なのでざっと目を通して不明な点がなければ飛してほしい．3 章からが本題で，普通とは逆にたわみ曲線の計算から入る．3 章でたわみ曲線の形状を決める微分方程式を導出し，4 章でそれを解く．続く 5 章では，分布荷重と集中荷重が混在するような状況を，1 本の式で書き下す．そこで出てきたデルタ関数の使い方を 6 章で学ぶ．ここまでの内容で解ける問題も多い．

7 章は，トルクのつり合い式を作るときに，なぜモーメント荷重[1)]を平行移動してよいのかが分らない人のための章である．分かっている人は飛してよい．8 章では，モーメント荷重を集中せん断力 (デルタ関数) として数式表現する．この時点で，はりの計算に出てくる全ての荷重が数式表現される．これを踏まえた 9 章で，はりの算術が完成する．4 つの基本例題で必要な全ての算術を体験するが，この 4 問については諸君に暗記を強要する．この時点で，少くとも教科書レベルの「真直はりのたわみ曲線」に関しては，繁雑さ以上の難易度は感じなくなると思う．

以上が第 I 部の構成である．特に計算問題については章末に手本を示しておくので参考にしてほしい．この第 I 部は 90 分の講義 7 回分だから，寝食を忘れれば一週間で読破できると思う．理解度は全 38 題の課題について「何も見ないで解けるか？」を基準にチェックするとよい．計算で手が止まるのは不合格である．設問自体はデータなので暗記不要だが，計算手順，すなわち段取りが自らの身体に転写されないかぎり理系の勉強をしたことにはならない．

第 II 部は番外編「dx と dy の使い方」として，基礎理論の十分な理解を念頭に構成した．この学習目標は実質的に「無限小 dx, dy に対する十分な理解」と同値であると著者は見ている．その準備体操がてら 10 章で曲率の等式を導き，11 章で伝家の宝刀 $(dx)^2 = 0$ を導く．これを使って 12 章では，第 I 部で天下りに与えた公式の導出原理を解明していく．以上の自然な応用として，はりの振動解析に向けた補遺 (おまけ) を付けたので参考にしてほしい．

この第 II 部の内容に習熟すれば，弾性学や電磁気学などの，いわゆる連続体力学の教科書が何とか読めるようになるはずだ．この手の教科書は dx と dy による解説から始まるのが常だが，多くの初学者はこの初っ端で跳ね返され，意味不明の dx と dy を目の上のたんこぶに置いたまま，根性だけでその後を読む．その苦痛たるや言語に絶するが，これが解消されればと思う．

最後に本書の限界だが，例えば「曲りはり」や「柱」などの中級問題は，本書の範囲では解けない．本書を卒業した諸君は，振り返らずにどんどん先に行ってほしい．脳の容量を心配する必要はない．人間の脳というものは，何かを完全に納得すると，そのぶんのスペースを必ず空けてくれる．健闘を祈る．

[1)] 混同を避けるため，本文中では**トルク荷重**と呼ぶ．

目次

はじめに i

本書の構成 iii

第 I 部 本編 — 解くための材料力学 1

0 はりの計算とは 3

0.1 基本方針 3

0.2 材料力学の仮定 3

1 外力と内力の図示 6

1.1 外力の図示 6

1.2 内力の図示 8

1.3 誤解の考察 10

1.4 まとめ 11

2 せん断力と曲げモーメント 12

2.1 仮想はりの切断 12

2.2 曲げモーメント 13

2.3 せん断力 14

2.4 誤解の考察 16

2.5 まとめ 17

3 曲率の等式 18

3.1 計算手順書 18

3.2 曲線の曲率 19

3.3 はりの曲率 22

3.4 手本 24

4 はりの算術 — 入門編 27

4.1 座標およびたわみ角 27

4.2 計算手順書 28

4.3 計算ドリル 28

4.4 手本 29

5 荷重の数学モデル 34

5.1 荷重の幾何学 34

5.2 積分 34

5.3 集中荷重 36

5.4 手本 38

6 デルタ関数と累積荷重 40
6.1 デルタ関数 40
6.2 デルタ関数の積分法 41
6.3 累積荷重 43
6.4 SFD と BMD への応用 44
6.5 手本 45

7 剛体のつり合い 49
7.1 回転作用と変形作用 49
7.2 2 つのつり合い式と静定荷重 50
7.3 分布荷重の重心 53
7.4 誤解の考察 53
7.5 手本 54

8 トルク荷重の数学モデル 58
8.1 集中せん断力 58
8.2 荷重の完全な数式表現 60
8.3 手本 60

9 はりの算術 — 完結編 61
9.1 計算手順書 61
9.2 終端の積分値 0 を利用した検算法 62
9.3 4 つの基本例題 63
9.4 手本 65

第 II 部　番外編 — dx と dy の使い方 **79**

10 曲線の曲率 81
10.1 微分？ 81
10.2 曲率 (3.3) の導出 82
10.3 全微分の公式 85

11 全微分の公式 86
11.1 独立変数の微分 — $(dx)^2 = 0$ 86
11.2 テイラー展開 89
11.3 従属変数の微分 — 全微分の公式 89

12 なぜ荷重を 4 回積分するのか？ 93
12.1 荷重 $\Leftrightarrow$ せん断力 93
12.2 誤解の考察 94
12.3 せん断力 $\Leftrightarrow$ 曲げモーメント 95
12.4 4 階の微分方程式 97

補遺 — はりの振動解析に向けて 99

A テイラー展開 101

A.1 1 変数関数 $f(x)$ の場合 101

A.2 2 変数関数 $f(x, y)$ の場合 102

A.3 テイラー展開と高次微小量 103

関連図書 106

おわりに 107

第 I 部

本編 — 解くための材料力学

0

はりの計算とは

本章は「はりの計算」を全く知らない人のための章である．知っている人は飛してほしい．

0.1 基本方針

思い返せば，高校までの物理に**変形**は存在しない．このように変形を無視して，なお残る性質を扱う力学体系を，**剛体の力学**と呼んだ．

ところが実際に機械を作ろうとすると，剛体の力学だけで済むことはほとんどない．なぜなら，変形を無視できるほど堅い機械を作ろうとすれば，必要以上に頑丈で重くなってしまうからである．例えば，曲らない翼の飛行機を作ろうとすれば重すぎて飛べないのである．

というわけで，機械のほうを高校までの物理 (剛体の力学) に合せるのはナンセンスであって，逆に，機械に合せて理論を作るほうが合理的である．こうして，部材の変形を計算できる**材料力学**が作られた．

材料力学で変形を計算するのはよいとして，具体的に何を計算すればよいのだろうか．人類があみだした基本方針は次のとおり．

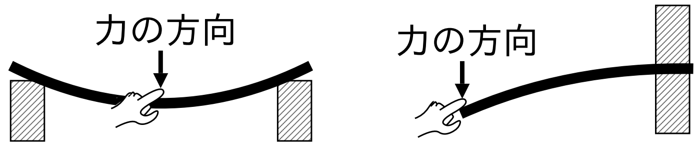
- 物体の変形後の形状を，数学的な曲線とか曲面として算出する．

数学的な曲線とは 1 変数関数 $y = f(x)$，曲面とは 2 変数関数 $z = g(x, y)$ のことである．こう定式化すれば確かに変形が「計算」できそうではある．あとは，対象物体に応じて，$f(x)$ なり $g(x, y)$ の関数形を定めれば，変形の計算が完了する．そのための手順書の 1 つを材料力学と呼ぶ．

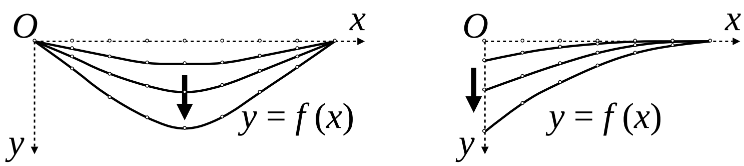
0.2 材料力学の仮定

0.2.1 はりの変形

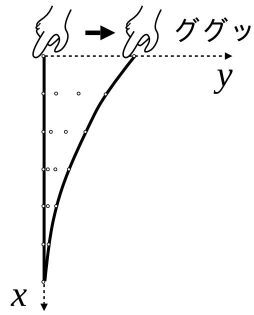
物体の変形のしかたには様々あるが，本書が扱うのは材料力学的な「はりの変形」である．ところで「はり」とは次のようなものである．



ようするに，側面から押されて変形する棒を「はり」と呼ぶ[1)]．そして材料力学では，はりの形状を 1 変数関数 $y = f(x)$ で数式表現する[2)]．その結果，材料力学の仮想世界においては，はりの各点は y 軸方向にしか変位しない．



こんなふうに，上から押すと丁度よく伸びる棒など作るほうが難しいが，1 変数関数 $y = f(x)$ を使うかぎり，このようにしか変形を表現できない．かなり現実ばなれした仮定だが，これで計算が大幅に簡略化される．材料力学の計算がレポート用紙数枚に収まるのはこの仮定のおかげである．次頁のように，はりを縦に置いても同じことで，はりの各点は y 方向にしか動かない[3)]．



以上，はりの変形を 1 変数関数 $y = f(x)$ によって数式表現し，具体的な状況に応じて $f(x)$ の関数形を定めることを「はりの計算」という．

0.2.2　はりの範囲

はりの計算が初めての人には，何のことやら実感できないかも知れないが，混乱しがちな問題を前もって整理しておく．

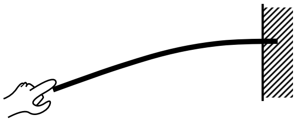
材料力学の典型的な例題に次のようなものがある．はりが壁に取り付けてあり，端を押したらどう曲るか，といった問題である．

---

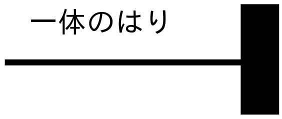
1) 同じ棒でも軸方向から押されると「柱」と呼ばれる．同じ棒なのに名前が違うのは，押される方向によって計算手順書が違うからである．

2) 弾性学など他の流派もあって，はりの形状の数式表現は 1 通りではない．本文に示したのは，いわば材料力学流の数式表現．

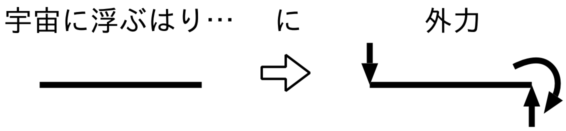
3) と暗黙に仮定して計算される．



この問題を見て「どこまでが，はりか？」で混乱する初学者が後を断たない．特に上図のように，御丁寧にも壁にメリこんだはりを作図されると，一層混乱が増すようである[4]．結論からいうと,「どこまでが，はりか？」は解く人が決める．すなわち，壁まで含めた，次のような T 字型のはり (下図) も立派な材料力学の問題である．



しかし，これでは計算量が増えるので，普通は壁までは含めず下図のように考える．



より高尚にいえば，はりを**系**，壁を系の**外部**と見なすのである．本書もこれに準ずる．およそ力学的思考における**系**とは，宇宙空間にポツンと浮ぶ存在である．系にとっての感心事は「外部がどんな外力を及ぼしてくるか」だけであって，外で何が起きてようが関係ない[5]．

したがって,「えっと壁にも力が伝わって … 」などと考えているときは，無意識に**系**の範囲を「T 字のはり」まで広げている．すると今度は「T 字のはり」がポツンと浮ぶ．浮んだだけでは変形しないから，このような変形を理論化するには「床」とか「天井」のような**外部**が必要になる．さらに広げて，床と天井までを系と考え，そのまた外側を外部と見なすことも可能だが，際限がない．そこで「今回はここまで」という人為的な枠を設定し，この枠内を**系**と呼び，枠内だけ計算するわけである．あくまで人間の便宜であって，あらかじめ自然が境界を備えているわけではない．

本書では「T 字のはり」のような系は扱わない．本書が扱うのは，宇宙空間にポツンと浮ぶ一本の棒である．

---

[4] えっと壁のとこで，ん？ 壁にも力が伝わって，ん？ 伝わるよな，ん？…

[5] 極端な話，外力の発生源は超能力でもよい．単位 N (ニュートン) で測れる力なら，はりの変形は計算可能．

1

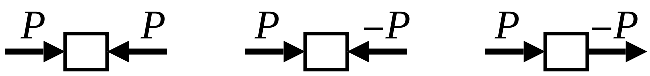
外力と内力の図示

本章は，外力や内力をうまく図示できない人のための章である．図示できる人は飛ばしてほしい．

1.1　外力の図示

力はベクトル，ゆえに矢印で図示できると習った．ベクトルは大きさと方向を持つとも習った．しかし，その図示で混乱する諸君が少なからずいる．

具体例として,「力のつり合い」の図示を考えよう．力の大きさを P としたとき，次の 3 つの図示のどれが正しいか．



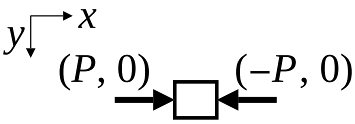
正しいような，正しくないような．作図規則が違うのは明らかなのだが，実際どう違うのだろう．作者達に聞いたら，次のように答えそうではある．

左門くん　「大きさ P なんで，それ書いて，方向を矢印で描きました.」

中村くん　「左門のだと，力が逆向きなのに足しても 0 にならないんで，僕は $\pm P$ で書きました.」

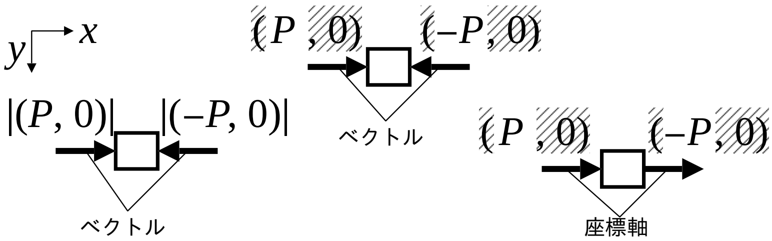
右京くん　「中村みたいに，最初から矢印逆に描いちゃうと，矢印ひっくり返したとき $-P$ が P になっちゃいますよねえ．ん？」

ん？ この混乱から抜け出すには座標軸がいる．座標軸を定め，矢印ベクトルを成分表示すれば，じきに霧も晴れる．



このように，ベクトルを素直に使うと「力のつり合い」が明解に表現できる．計算上も，$(P, 0) + (-P, 0) = (0, 0)$ より力の総和は零ベクトルになるから，どの方向にも余計な力は残らず，確かにつり合っている．

ここで，ベクトル (x, y) の大きさを $|(x, y)| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ と書くと，$|(P, 0)| = |(-P, 0)| = P \quad (P > 0)$ である．ここまで準備すると，混乱の意味が分る．すなわち，以上の 3 つの図示が「力のつり合い」の図示であるためには，次のように解釈する以外にない．



左図から順に見ていくと，

- 矢印は力ベクトル．つり合うために逆向き．
- 文字は絶対値 (大きさ)．さもないと左右で同符号にならない．

中央は，

- 矢印は力ベクトル．つり合うために逆向き．
- 文字はベクトルの x 成分．逆向きだから異符号．

右図は，

- 矢印は座標軸．力ベクトルに相当する矢印は，この図にはない．
- 文字はベクトルの x 成分．逆向きだから異符号．

である．どうだろう．霧は晴れただろうか？ 普通の材料力学の教科書でよく使われるのは，左または中央の図示法だと思う．

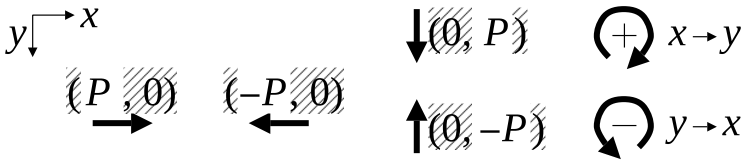
本書では，中央の図示法を採用する[1)]．すなわち，矢印は力ベクトル，文字はベクトルの x 成分とする．垂直な力ベクトルについては，注目する成分を暗黙に y 成分に変えて図示する．

> **Note:** それじゃあ斜めの力はどうなるんだ，と訝る諸君の理性は間違いなく健全だが，あまり厳密にやると標準的な教科書との接続が悪くなるので，ここらで止めておく．ちなみに,「はりの計算」における並進性の外力には，水平ないしは垂直なものしか出てこないので，この図示法でも実用上の混乱は生じない．

以上の考察を定義としてまとめておく．

[1)] $\vec{P} + (-\vec{P}) = \vec{0}$ というベクトルの算法がそのまま通用するところが，一番自然だと思う．

定義 1 (外力の符号): 本書では，外力を「座標軸の方向から符号が定まる矢印」と捉え，次のように図示する．



x 軸を右向き，y 軸を下向きにとり，この座標軸の向きを並進性の外力の正の向きとする．回転性の外力については，右ねじ方向を正回転，すなわち x 軸から y 軸へ回す方向を正にとる．斜線部分は今後省略する．　$\square$

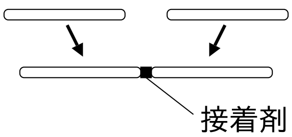
このように，外力の符号は座標軸の方向から定まる．特に回転性の外力については「右ねじ方向」が正である．x 軸と y 軸をどの向きに設置するかに応じて,「右ねじ方向」は，紙面上で時計回りにも反時計回りにもなることに注意しよう．

1.2　内力の図示

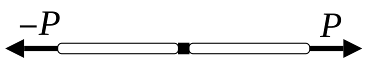
　これに対して，内力は 1 本の矢印では図示できない．例えば，よく知られた内力に張力があるが，1 本の矢印では両側から引張れない．この張力を念頭に，内力についての考察を進める．内力の本質は「対」にある．

> **Note:**　ちまたの教科書を見渡してみると，内力の理解には，物体を 2 分割する方法と 3 分割する方法があるようだ．どちらの流儀でも結果は同じだが，注目点が違うので，初学者は混乱するようである[2]．

　まずは，物体を 2 分割することで張力を図示してみる．棒を 2 本用意して，これらを接着剤でくっつける．



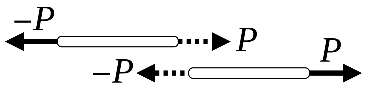
これらを両側から引張っても，接着材のおかげで棒は離れずにいる．



ここで，接着材が果すのと同じ力を考える．2 本の棒が静止し続けるための力と解釈できるから，この力は引張力とつり合う．

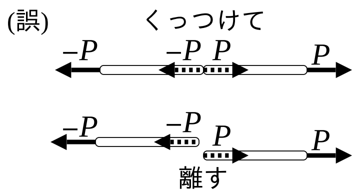
---

[2] 引張・圧縮を 3 分割で解説した直後に，せん断を 2 分割で解説するなど，初学者の理解を妨げる教科書が多いように思う．



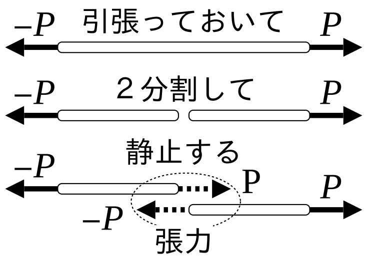
書き加えた点線矢印の「対」が張力である．これが，いわゆる 2 分割による張力の図示である．

Note: 以上の図示において，一度くっつけて離すと次のように誤解することがあるので注意．

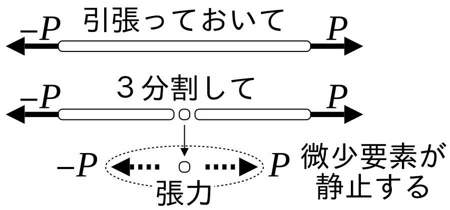


これでは，接着した瞬間に 2 本の棒は左右にふっ飛ぶ．こんな接着剤はない．

ここで改めて，2 分割による張力の表現を教科書風に言い直すと，張力とは，切断された棒が，依然として静止を保つための力の「対」である．



他方，3 分割により張力を図示すると次のようになる．



こんどは注目点を接着剤 (まん中の微小要素) に移し，接着剤が静止を保つための力の「対」を，張力と見なしている．弾性学などでは，微小要素の寸法を dx とか dy で書いて微積分までもっていくので，3 分割が多用される．

ここで，2 分割と 3 分割の共通点を探すと，どちらの図にも点線矢印の対 $(-P, 0)$, $(P, 0)$ が描かれている．結局のところ，作図法という人間の都合とは無関係に，張力の表現として対向する「矢印の対」

を得るのである．この「対」が張力の本質である．このような対によって生じる作用を一般に**内力**と呼ぶ[3]．内力が内力であるためには，対は不可分であり，対を分けて外力× 2 としてしまうと，それはもはや内力ではない．あくまで，対向する 2 つの外力から，1 つの内力という別種の作用が派生するのである．

さて，この内力を我々の計算に導入していくには，どうにかして内力を数値化する必要がある．人類があみ出した**処方箋**は，次の通り．

(1) 物体を仮想的に 2 分割 (ないしは 3 分割) し，静止させる．

(2) 出現した矢印の対 ($\rightarrow \leftarrow$ や $\leftarrow \rightarrow$ など) を，基本要素と見なす．

(3) 矢印の 1 対に，1 つの数値を割当てる．

  a. 数値の絶対値は，いずれかの矢印の絶対値と定める．

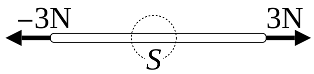
  b. 数値の符号は，物体の変形方向で定める．矢印の向きでは定めない．

本書もこの処方箋に従い，

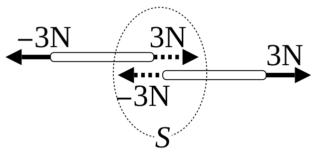
- **物体の変形方向で符号が定まる「矢印の対」**

を**内力**と捉える．

課題 1　3 N で引張られる，次の棒の張力 S を調べよ．伸ばす張力を正とする．



(解答例)　処方箋に従い，棒を 2 分割して静止させると，対向する矢印の対



を得る．この対を基本要素とみなし，1 つの数値 S を割りあてる．いずれの矢印も絶対値は 3 N なので，$|S| = 3$ N．棒は伸ばされているので，符号は $+$．ゆえに，この棒の張力は $S = +|S| = 3$ N である．

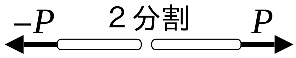
1.3　誤解の考察

内力の符号を「物体の変形方向から定める」と聞いて，もっと直接的に矢印の対の「内向き・外向き」で定めてはどうか？ と思うかも知れない．ところが，ちまたの教科書を見ると，大抵は「物体の変形方向から定める」と書いてある．何故か．この疑問を検討して本章を終ろう．

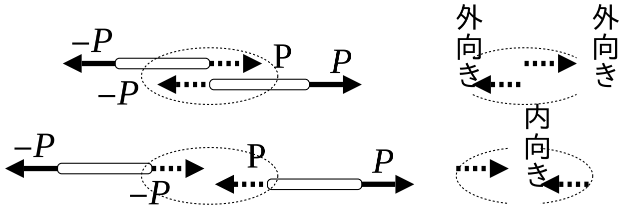
前節までの内力の図を，著者はかなり注意深く作図した．描き方によっては，物理的には同じ矢印の対が，表記上反転して見えるからである．例えば，同じように

---

[3] 内力を漢字一文字で書くなら,「力」ではなく「圧」である．



と 2 分割しても，描き方によって矢印の対は内向きにも外向きにも見える．



枠内だけを見ると，逆の張力に見えなくもない．という感覚を信じて「内向き・外向き」の定義を適用してしまうと，恐しいことに，同じ張力が人によって正になったり負になったりする．同じ張力なのに …

そこで，こんな無用の混乱を避けるため，内力の符号は物体の変形方向から定める，とするのである．こう定めてしまえば，例えば上の張力は，どちらも誰がどう矢印を図示しようが「伸ばす」張力である．

通常，張力の符号は「伸ばす＝正」と定める．したがって，上の張力は，誰がどう描こうが正である．逆に棒が縮むなら，誰がどう描こうが張力は負である．ああ，すっきりした[4]．

1.4 まとめ

- 座標軸の方向を基準に符号が定まる「矢印」が，外力．
- 物体の変形方向を基準に符号が定まる「矢印の対」が，内力．

[4] 私だけ ?!

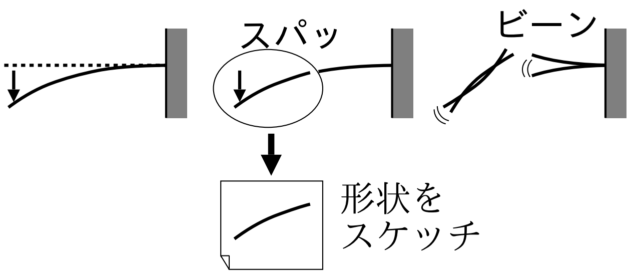
2

せん断力と曲げモーメント

本章は，せん断力と曲げモーメントをうまく実感できない人のための章である．実感できる人は飛してよい．はりの計算では，**せん断力**と**曲げモーメント**という内力が主役を努める．これらの物理的なイメージをつかみ，図示できれば目標達成.

2.1　仮想はりの切断

内力を考える常套手段として，物体を仮想的に 2 分割しよう．すなわち，力を受けてたわんだ片持ばりを途中で切断する．

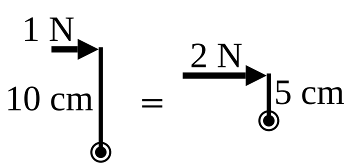


現実には一番右のような状態になるはずだが，切断の瞬間に時間を止めて，形状をスケッチしておく.

次節では，スケッチした形状を復元するが，それには，ねじる力が必要である．そのための物理量に

$$\text{トルク} = \text{力}\ [N]\ \times \text{動径}\ [m] \tag{2.1}$$

がある[1)]．トルクは，次のような状況で同じ数値をとる.

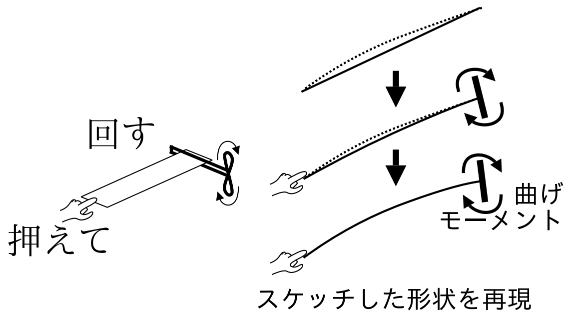


---

1) **モーメント**とも呼ぶ．曲げモーメントとの区別がまぎらわしいので，本書では「曲げ」が付かないモーメントを全てトルクと呼ぶことにする.

2.2 曲げモーメント

切り取ったはりに，トルクを作用させて，スケッチした形状を復元しよう．



まず，切り取ったはり (実線) を，スケッチ (点線) に重ね合わせる．何もしないと，はりは真っ直なままである (上段)．はりの一方を指で押え，他方を，コンビーフの缶詰についてくるような取手でねじる．取手をねじるトルクが，ある大きさ T に達したとき，はりの形状がスケッチと重なる．この T が，はりの切断面に働く**曲げモーメント** (の絶対値) である．壁に残された，はりの形状も同じく復元できる．

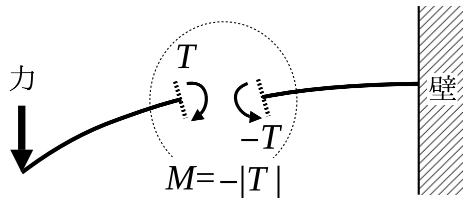


図 2.1 たわんだはり (不完全版)

こうして切断前の形状が復元されると，内力の本質である**対向する矢印の対** $T,-T$ が現れる．単に回すだけでは全体が回るだけで曲らず，曲げるには逆向きの回転力も必要なので，必然的に,「曲げ」という作用には「回転力の対」が伴うのである．この対向する矢印の対を**曲げモーメント**と称し，p.10 の処方箋に従い，1 つの数値で数値化する．図 2.1 に円で囲って示す．

定義 2 (曲げモーメントの符号と絶対値): 内力なので p.10 の処方箋に従い，

(1) 符号は回転方向 (矢印の向き) ではなく，はりの変形方向から定める．

(2) 絶対値は，トルクの対 $\pm T$ の (いずれかの) の絶対値とする．

はりの仮想変位	下に凸	上に凸
曲げモーメント	$+\lvert T\rvert$ (正)	$-\lvert T\rvert$ (負)

□

曲げモーメントの符号と，T 自体の符号が無関係であることを強調するため，定義の表記に絶対値記号 $|T|$ を使ってみた．

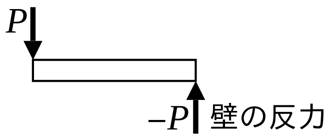
ここで**仮想変位**とは「実際に曲るとすればこっち向きだろう」というふうに定める変位のことである．思考実験により変形後のはりを想像し，それを遠目から見たときに凸になる向きを考える．

ちなみに，スケッチしたはりは**上に凸**なので定義より符号は**負**，絶対値は $|T|$ なので $M = -|T| < 0$ である．

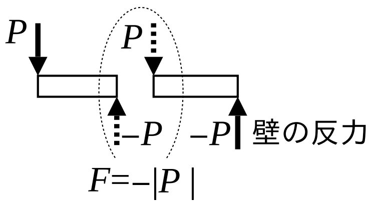
課題 2　上に言葉で述べた「曲げモーメントの符号」の定義をスケッチで示せ．

2.3　せん断力

せん断力のみを考えるとき，曲りを写実的に表現する必要はない．曲げに関しては，曲げモーメントが全てを受け持つので，曲げや回転の可能性を完全に無視した



のような図で考える[2)]．これを切断し，各々が静止を保つための力を加えると，**対向する矢印の対** $-P, P$ が現れる．下図に円で囲って示す．



この対を**せん断力**と呼び，p.10 の処方箋に従い，1 つの数値で数値化する．

定義 3 (せん断力の符号と絶対値): 同じく内力なので p.10 の処方箋に従い，

(1) 符号は回転方向 (矢印の向き) ではなく，はりの変形方向から定める．

(2) 絶対値は，力の対 $\pm P$ の (いずれかの) 絶対値とする．

はりの仮想変位	右が沈む	左が沈む
せん断力	$+\lvert P\rvert$ (正)	$-\lvert P\rvert$ (負)

※ **仮想変位**とは「実際に沈むとすればこっち向きだろう」の変位．　□

2) 回転と並進 (=平行移動) は分離できる．全ての力学の共通認識．

せん断力の符号と，P 自体の符号が無関係であることを強調するため，定義の表記に絶対値記号 $|P|$ を使ってみた．ちなみに，上図のはりは変形後に左が沈むから，符号は**負**である．

課題 3 上に言葉で述べた「せん断力の符号の定義」をスケッチで示せ．

ここまでくると，図 2.1 の嘘が分かる．図 2.2 のように修正する必要がある．点線矢印の対 $-P, P$ が**せん断力**である．**左が沈**んでいるから，定義より，せん断力は**負**である．この対が無ければ，例えば左のはりは下向きにふっ飛ぶが，そんなことは起らない．取手をねじってスケッチに重ねるとき，**我々は無意識にせん断力を加えていた．**壁ぎわの $-P$ と M_R は，壁からの並進性および回転性の反力であり，これらの図示も忘れてはならない．

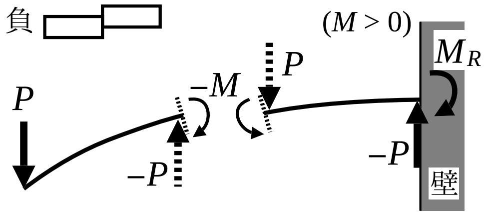
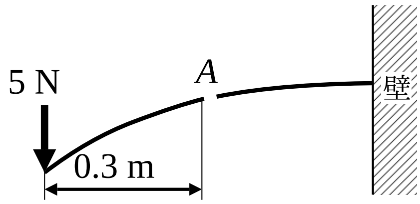


図 2.2 たわんだはり (完全版)

本書では，以上に定義した曲げモーメントとせん断力の数値を，積分計算で求めてしまうので以下省略．と言いたいところだが，ごく初等的な例題をごく普通に解いておく．直観的な理解を深めるのが目的である．

課題 4 仮想的な切断点 A における，せん断力と曲げモーメントの数値を求めよ．



(せん断力の解答例) 左端の 5N とつり合うために，切断点 A には対向する垂直な矢印の対 $-5\text{N} \uparrow\downarrow +5\text{N}$ が生じる．ゆえにせん断力の絶対値は 5N．はりは左が沈むので，符号は負．ゆえに，せん断力は -5N である．

(曲げモーメントの解答例) 左端の 5N が A 点で発生するトルク $5 \times 0.3 = 1.5\text{Nm}$ とつり合うために，切断点 A には，対向するトルクの対 $+1.5\text{Nm} \downarrow\uparrow -1.5\text{Nm}$ が生じる．ゆえに曲げモーメントの絶対値は 1.5Nm．はりは上に凸なので，符号は負．ゆえに，曲げモーメントは -1.5Nm．

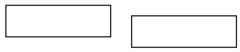
課題 5 以上の解答例を，分りやすく図示せよ．

ちまたの教科書では，かなり複雑な問題でも以上と全く同じやり方で解かせようとする．このような職人技は著者のような素人にはとても無理なので，本書では同じことを積分でスカッとやる．

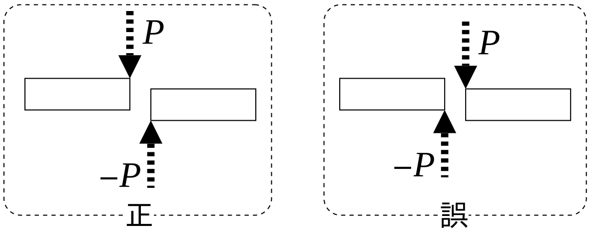
2.4　誤解の考察

ところで，講義や例題では納得したつもりが，いざ自力で解く段階になると仮想変位が逆に見えて答えが合わない諸君も多いようである．これは，内力の点線矢印を新たに「原因」と見なして，はりを変形させてしまう誤解である．何が誤解かといえば，原因と結果が逆なのである．

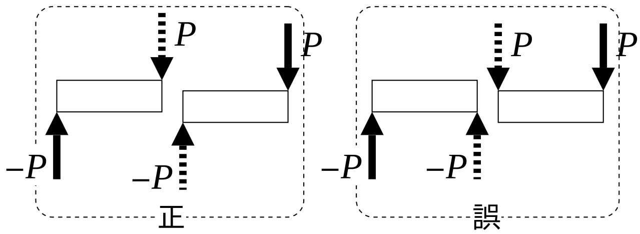
ちょっとやってみると，次のような右が沈むような変形



に対して，せん断力を構成する一対の「点線」矢印を描きこんでみると



なわけである．その理由は，このような変形の原因である外力の「実線」矢印を描きこめば一目瞭然である．



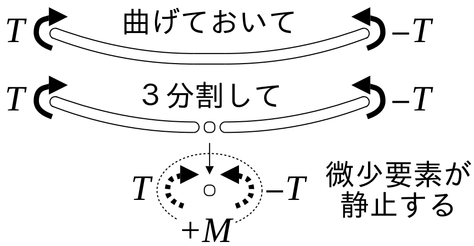
正しい左の図示では，せん断力が変形を「もちこたえて」いるためはりは静止するが，誤った右の図示では，実線矢印によって生じた変形をせん断力がさらに増幅しており，はりは静止できない．どちらが現実かといえば，もちろん正しい左の図示である．

ようするに，内力の点線矢印は「原因」ではない．あくまで変形の「結果」である．混乱したら，変形後のはりを遠目から想像するとよい．遠くのはりにまず変形が起きて(この時点で符号が定まる)，近寄ってみたら内力 (点線矢印の対) を発見するわけだ．

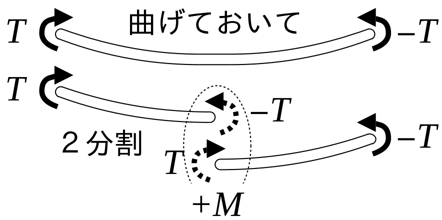
本書では内力の数値を積分計算で定めてしまうので，誤解したままでも誤答の確率は低いが，やはり物理的な理解は重要なので，この種の誤解は放置すべきではない．むしろこのような誤解を正すための手段として，これから述べる計算法を活用してほしい．

Note (補足 —3 分割による図示—):

本章では，せん断力と曲げモーメントを図示するのに棒を 2 分割したが，もちろん 3 分割による図示も可能である．例えば，曲げモーメントは次のようになる．



この 3 分割の図示によれば，曲げモーメントとは，まんなかの微小要素が受ける 1 対のトルクである．他方，2 分割は



だから，2 分割でも 3 分割でも同じく，トルクの対が現れる．そして，どう図示するかとは無関係に，この対の絶対値と符号が定まるのであった．

2.5 まとめ

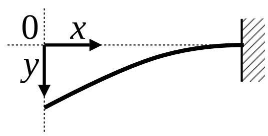
- 内力の符号は矢印の向き (座標) からは定まらない．
- 曲げモーメントは，下に凸のときが正．
- せん断力は，右が沈むときが正．

3

曲率の等式

そろそろ計算を始めよう．標準的な教科書とは逆に，はりの計算の最終段階から始める．**曲げモーメント**と**たわみ**の関係式が理解できれば目標達成.

3.1 計算手順書



定義 1 (p.8) に従って，右図のように座標を取り，はりの変形後の形状を 1 変数関数 $y(x)$ でモデル化する．$y(x)$ を**たわみ曲線**と呼ぶ.

たわみ曲線 $y(x)$ を具体的に定める手続きは，次のような**計算手順書**に集約される．人類はこの計算手順書を発見し，それを材料力学と名付けたわけだ.

1) 荷重分布関数 $w(x)$

$\Downarrow$ 積分

2) せん断力 $F(x)$

$\Downarrow$ 積分

3) 曲げモーメント $M(x)$

$\Downarrow$ 積分

4) はりの傾き $y'(x)$

$\Downarrow$ 積分

5) たわみ曲線 $y(x)$

この手順書によれば，荷重 $w(x)$ から始めて，せん断力 $F(x)$，曲げモーメント $M(x)$，はりの傾き $y'(x) \equiv dy(x)/dx$ を経て[1]，たわみ曲線 $y(x)$ が求まる．標準的な教科書でもこの順序で話が進むが，本書では，ちょっと順番を変えて高校数学だけで解ける後半 3)〜5) を先に済ませてしまおう．ようするに，曲げモーメント $M(x)$ は

---

[1] 傾き $dy(x)/dx$ を角度表示したものを**たわみ角**と呼ぶ．傾きを角度に変換する関数は $\tan$ で $dy(x)/dx = \tan\theta$ だが，同じことを $\theta = \tan^{-1} dy(x)/dx$ とも書く．$\tan^{-1}$ の数値は電卓で計算できる.

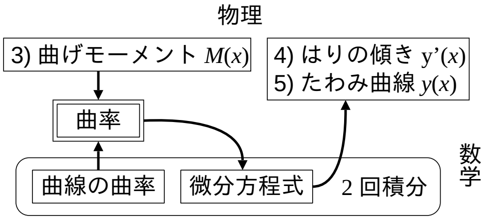


図 3.1　3) 曲げモーメント $M(x)$ 以降の計算

しばらく既知とする．

後半 3)〜5) の手順を図 3.1 に詳しく示す．このように，物理的な曲げモーメントは，**曲率**なる量を介して (数学的な) 曲線の曲率と結びつくが，そこから 1 つの微分方程式 (3.1) が出てくる．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}M(x) \quad (EI \text{ は剛性と呼ばれる定数}) \tag{3.1}$$

これを本書では**たわみ曲線の微分方程式**と呼ぶ．**剛性** EI は「曲げづらさ」を表す定数である[2)]．(3.1) を解けばたわみ曲線 $y(x)$ が求まる．(3.1) が身近に感じられたならば本章は目標達成である．

ところで，(3.1) は 2 階の常微分方程式なので，数学的な形式は自由落下の運動方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \quad (m \text{ は質量，} g \text{ は重力加速度と呼ばれる定数}) \tag{3.2}$$

と同じである．ゆえに (3.2) が解ければ (3.1) も解ける．準備体操に丁度よい．

課題 6 (自由落下運動)　自由落下物体の時刻 t の位置 $y(t)$ を，(3.2) を 2 回積分することで求めよ．積分定数は，初期位置 y_0，初速度 v_0 として定めよ．

自由落下の運動方程式 (3.2) とたわみ曲線の微分方程式 (3.1) は数学的には同じだが，もちろん物理的な意味は異なる．(3.2) が力の等式なのはよいとして，(3.1) は何の等式か？ — 実は，(3.1) は**曲率の等式**なのだが，それだけに，**曲率**なるものが分らないと (3.1) は身近にならない．早速解明していこう．

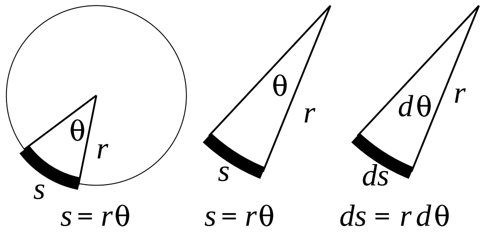
3.2　曲線の曲率

プラスチック定規を曲げる．その曲り方を，諸君ならどのように数値化するだろうか．ふつうは**曲率**を使う．

---

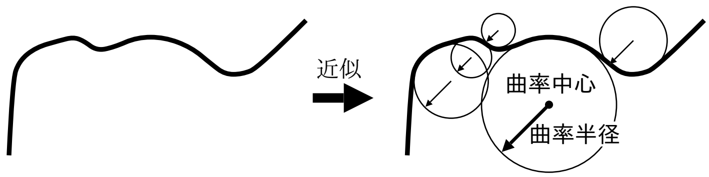
2) EI とは，**弾性係数** E と**断面 2 次モーメント** I の掛け算 $E \times I$ のことである．機械設計の実務などでは，とりあえず掛け算の値だけ $EI > 6.95 \times 10^3$ などと決めておいて，構想が確定してから E（素材）と I（断面形状）の組合せを選定したりする．詳細は標準的な教科書 [1] を参照のこと．

中心角と円弧　すでに弧度法 (ラジアン) には慣れているだろうが，少し目を慣らしておく．円の省略や見慣れない記号に惑わされてはいけない．



3 つとも単なる弧度法である．

曲率半径　下図のように，曲線を円弧のパッチワークで近似する状況を考える．



それぞれの円を**曲率円**，半径を**曲率半径**，中心を**曲率中心**と呼ぶ．これらの円が，曲りを測る業界標準の**ものさし**である．

曲線のそれぞれの場所にピッタリの円があるので，曲線の正確な近似には複数の円弧が必要になる．したがって，1 つの曲線から複数の曲率半径が出てくる．曲率半径が 1 つしかない特別な曲線が円である．

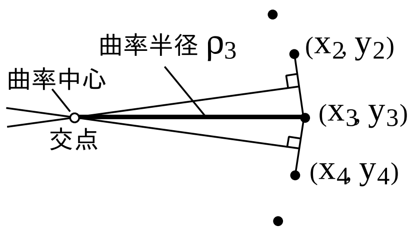
> **Note:**　厳密にはパッチワークを無限に細かくとる．すると丁度，時間軸上の 1 点で瞬間速度が測られるように，1 つの曲率円は 1 点の曲りだけを担当するようになる．この場合，曲線に貼り付ける円弧の長さは (論理的に) 無限小．

曲率　曲りの数値として，曲率半径をそのまま用いて一向にかまわないが，その逆数を使うことが多い．曲率半径を ρ とした場合，その逆数

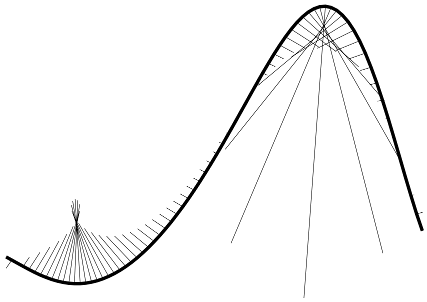
$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

を**曲率**と呼ぶ．こう定義すると「**曲**がり**率**→大」が急カーブに対応するので，感覚的にも自然である．

より工学的なセンスで，具体的にデータから求めるには，例えば下図のようにする．



すなわち，隣り合う点を継ぐ線分の，垂直 2 等分線の交点を近似的な曲率中心と見なしている．これで，曲線上の点 (x_3, y_3) における曲率 $\kappa_3 = 1/\rho_3$ が近似計算できる．その他の点にも同様の操作を繰り返すことで，曲率のデータ列 $\kappa_1, \kappa_2, \cdots$ が求まる．この方法で計算した曲率が下図である[3)]．



細線が曲率中心を向くように作図した．細線の長さが曲線各点の曲率である．定義通り急カーブに対する細線が長い．

曲線の曲率　以上，曲率によって曲りが数値化できた．ここでは，曲率を**手計算**する方法を述べる．例えば，曲線 $y = \sin x$ の位置 x における曲率を手計算したい．

この手計算に必要なのは，高校レベルの微分演算と代入操作だけである．標準的な微積分の教科書 [2] を見ると，曲線 $y = f(x)$ の曲率 $\kappa(x)$ は

$$\kappa(x) = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + (\frac{dy}{dx})^2\right)^{3/2}} \tag{3.3}$$

により計算できると書いてある (10.2 節 (p.82) 参照)．例えば $y = \sin x$ の曲率は

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x \quad \text{より} \quad \kappa(x) = \frac{-\sin x}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}$$

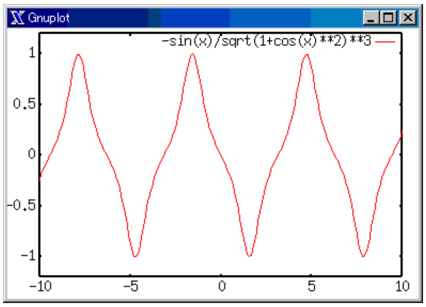
と計算できる．以上が曲率の手計算である．

手計算できた時点で一息つこう．どうやってグラフ化するかは，また別の問題である．高校流に増減表を作るのもよいが，著者なら Gnuplot[4)] というグラフ作成ソフトを使う．次のコマンドで $\kappa(x)$ がグラフ化される．(正弦波の曲率はもはや正弦波ではない)

```
plot -sin(x)/sqrt(1+cos(x)**2)**3
```

[3)] 20 行たらずのプログラムで計算できた．

[4)] http://www.gnuplot.info/



課題 7 (直線の曲率)　直線 $y = f(x) \equiv ax + b$ の曲率を手計算し，結果の意味を考察せよ．

曲率 κ の符号 $(\pm)$ は「曲りの向き」を表し，分子 d^2y/dx^2 の符号で決まる．曲率の $\pm$ が交代する点を変曲点と呼ぶが，高校数学では (3.3) の分子 d^2y/dx^2 だけに着目して変曲点の判定則を公式化したわけだ．

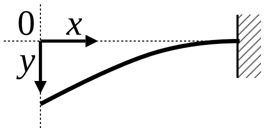
課題 8 (円の曲率)　半円 $y = f(x) \equiv \sqrt{r^2 - x^2}$ の曲率を手計算し，結果の意味を考察せよ．

3.3　はりの曲率

出所の違う 2 種類の曲率を等値して，たわみ曲線の微分方程式を導く．

3.3.1　はりの数学的な曲率

まずは純数学的なはりの曲率である．(3.3) を使えば任意の曲線 $y = f(x)$ の曲りを数式表現できるが，**はりの形状**



も数学的には**曲線**なので，(3.3) がそのまま流用できる．ただし y 軸の向きが逆なので

$$\kappa(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + (-\frac{dy}{dx})^2\right)^{3/2}}$$

とマイナスが付く[5]．さらに材料力学では，

- dy/dx は 1 より十分小さい．(はりが $45°$ より十分寝ている)

と仮定し，**高次の微小量** $(dy/dx)^2$ を 0 と見なして (A.3 節 (p.103) 参照)，上式を

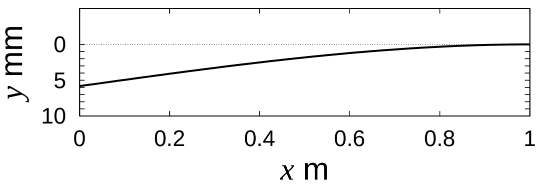
$$\kappa(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{-\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + (-\frac{dy}{dx})^2\right)^{3/2}} \doteqdot -\frac{d^2y}{dx^2} \tag{3.4}$$

---

[5] a を定数として $d(ay)/dx = ady/dx$，$d(ady/dx)/dx = ad^2y/dx^2$ で，$a = -1$．

と近似する．これが**はりの曲率その 1** である．

(3.4) の**近似誤差**は，上図のはり左端のたわみ角が 10° で 5 %，5° で 1% 程度である．試しに，左端で 5° たわむ長さ 1 m のはりを描いてみたのが下図である．



左端で 5.81 mm たわんでいる．この程度のたわみなら誤差 1%で計算できる．実用上この程度の誤差は問題にならない[6]．以上，(3.4) の意味するところは次のとおり．

$$\text{曲率 } \kappa(x) \fallingdotseq \text{たわみ曲線 } y(x) \text{ の 2 階微分}$$

これは純数学的な (微分幾何学の) 知見である．

3.3.2 はりの物理的な曲率

次は物理法則としてのはりの曲率である．**剛性** EI と**曲げモーメント** $M(x)$ について，以下の予想に特に違和感はないと思う．

- 強い力でひねれば，大きく曲がる．
- 剛性が小さければ，大きく曲がる．

いかがだろうか．

課題 9 (物理的な曲率) 下表の空欄に大小を書き込め．

はりの曲率	曲げモーメント	剛性
大		
小		

以上の関係を，最も素朴に比例・反比例で表現すると

$$(\text{はりの曲率}) = \frac{(\text{曲げモーメント})}{(\text{剛性})}$$

となる．実際にこれでよいのである．つまり

$$\kappa(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \tag{3.5}$$

が正しい数式表現である [1]．なんと比例定数すらつかない．まんまである．これが**はりの曲率その 2** である．以上，(3.5) の意味するところは，EI を定数と見てしまえば，次のとおりである．

$$\text{曲率 } \kappa(x) \propto \text{曲げモーメント } M(x)$$

これは経験から抽出された物理法則である．

[6] もっと大きくたわむ問題でも，**弾性学**を使えば精度良く計算できる．計算は複雑で手計算することは稀である．通常はコンピュータで数値計算する．

3.3.3　たわみ曲線の微分方程式

以上，全くの別経路から，はりの曲率について 2 つの表現 (3.4) と (3.5) が導かれた．各左辺の $\kappa(x)$ を介して，これらを等値すると

$$\kappa(x) = -\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

が得られる．以上，**たわみ曲線の微分方程式** (3.1) が得られた．(3.1) の左辺は数学出身，右辺は物理出身である．すなわち

- 左辺は，たわみ曲線 $y(x)$ の数学的な曲率 (ただし近似したもの).
- 右辺は，曲率 $= \frac{\text{曲げモーメント}}{\text{剛性}}$ という，物理的な比例・反比例式.

であり，これらが曲率で等値されている．身近になっただろうか？

ちなみに数学的な左辺だけだと，たわみ曲線は外界と相互作用しようがない．というよりむしろ，変形後のはりの曲率が曲げモーメントに比例するという物理的な発見があって，これをたわみ曲線 $y(x)$ と関連づけるために，数学を使って $y(x)$ を曲率表示したわけだ．例えていうなら，曲げモーメントと接続可能な曲率というコンセントを，数学を使って $y(x)$ からひき出したのである．

課題 10 (片持はりのたわみ曲線)　$M(x) = -Px$ とする．(3.1) を **2 回積分**して $y(x)$ を計算せよ．$y(l) = 0$，$\frac{dy}{dx}(l) = 0$ として **2 つの積分定数**を決定し，計算結果をスケッチせよ．

3.4　手本

Answer. 課題 6 (p.19) (自由落下運動)

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg$ を 1 回積分すると

$$\int \frac{d^2y}{dt^2}dt = \frac{dy}{dt}(t) = \int (-mg)dt = -mgt + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \text{同じく}$$

$$\int \frac{dy}{dt}dt = y(t) = \int (-mgt + C)dt = -\frac{mgt^2}{2} + Ct + D \quad (D \text{ は積分定数})$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = -mg \cdot 0 + C = C = v_0$$

$$y(0) = -\frac{mg \cdot 0^2}{2} + 0 \cdot 0 + D = D = y_0$$

$$\therefore \quad y(t) = -\frac{mgt^2}{2} + v_0 t + y_0$$

となり見なれた物理の公式を得る．　**END**

Answer. 課題 7 (p.22) (直線の曲率)

$$\frac{d}{dx}(ax+b) = a, \quad \frac{d^2}{dx^2}(ax+b) = 0$$

より

$$\therefore\ \kappa(x) = \frac{0}{(1+a^2)^{3/2}} = 0$$

ゆえに直線 $y = ax + b$ の曲率は 0 である．当然ながら直線は曲っていない． **END**

Answer. 課題 8 (p.22) (円の曲率)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}} &= -2x \cdot \frac{1}{2}(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}-1} = -x(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{d^2}{dx^2}(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dx}\big(-x(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\big) \\
&= -(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x \cdot -2x \cdot -\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}-1} \\
&= -(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(r^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x^2+(r^2-x^2)}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = \big(1+x^2(r^2-x^2)^{-1}\big)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{x^2+(r^2-x^2)}{(r^2-x^2)}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{より}$$

$$\therefore\ \kappa(x) = -\frac{\frac{r^2}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\left(\frac{r^2}{(r^2-x^2)}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{r}$$

ゆえに半径 r の円の曲率は半径の逆数 $-\frac{1}{r}$ (一定) である．すなわち，円の曲率円は円自身であり，1 つの円は 1 つの曲率しか持たない． **END**

Answer. 課題 9 (p.23) (物理的な曲率)

はりの曲率	曲げモーメント	剛性
大	大	小
小	小	大

END

Answer. 課題 10 (p.24) (片持はりのたわみ曲線)

(3.1) に問題の $M(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2}(x) &= -\frac{1}{EI}(-Px) = \frac{P}{EI}x \quad (EI\ \text{は定数}) \\
\frac{dy}{dx}(x) &= \int \frac{d^2y}{dx^2}(x)dx = \frac{P}{EI}\int x dx = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2}+C\right) \\
y(x) &= \int \frac{dy}{dx}(x)dx = \frac{P}{EI}\int\left(\frac{x^2}{2}+C\right)dx = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6}+Cx+D\right)
\end{aligned}$$

積分定数は

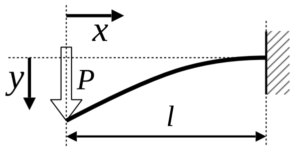
$$\frac{dy}{dx}(l) = \frac{P}{EI}\left(\frac{l^2}{2} + C\right) = 0 \implies C = -\frac{l^2}{2}$$

$$y(l) = \frac{P}{EI}\left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^2}{2}l + D\right) = \frac{P}{EI}\left(-\frac{l^3}{3} + D\right) = 0 \implies D = \frac{l^3}{3}$$

$$\therefore\ y(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{2}x + \frac{l^3}{3}\right)$$

以上，自由落下運動と全く同様にたわみ曲線 $y(x)$ が求まる．

実はこの曲線 $y = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{2}x + \frac{l^3}{3}\right)$ は，右端を固定端支持されたはりが，左端に集中荷重 P を受けたときのたわみ曲線 $y(x)$ である．下図に模式的に示す．



END

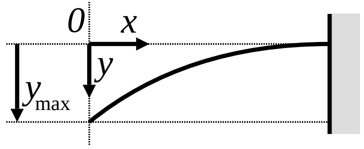
4

はりの算術 — 入門編

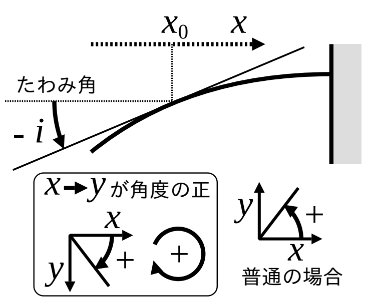
理論の理解が済んでしまえば，あとは運用力の養成である．したがって，本章の内容は「できてなんぼ」のスポーツである．何も見ないで答えが合えば目標達成．

4.1 座標およびたわみ角

定義 1 (p.8) に従い，次のように座標をとる．特に $y(x)$ の最大値を y_{max} と書く．



たわみ角とは，測定点 $(x = x_0)$ での接線の傾きを，角度表示したものである．



角度の正は右ねじの方向 (x 軸から y 軸へ回す向き)．上図では y 軸が下向きだから，時計回りが角度の正．傾きと角度の変換には tan とその逆関数を使う．

$$\tan i = \frac{dy}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad i = \tan^{-1}\frac{dy}{dx} \tag{4.1}$$

ちなみに，$\tan^{-1} 0.59$ などは放置してよい．$\sin 0.31$ などをそれ以上手計算しないのと同じである．具体値は関数電卓等で計算する．

4.2　計算手順書

全ては**たわみ曲線の微分方程式** (3.1) から始まる．再掲すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

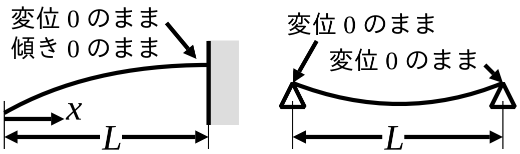
この微分方程式に，以下の手順を実行する．

1) $M(x)$ の具体形を代入する．
2) 両辺をそれぞれ 2 回積分する．
3) はりの形状から積分定数を定める．

手順 3) の**はりの形状**とは，ある点 $x = a$ における (複数あってよい)

$$\text{変位 } y(a) \text{ と傾き } \frac{dy}{dx}(a)$$

のことである[1)]．このような積分定数消去のための情報を**境界条件**と呼ぶ．この情報は**自明な特徴点**から拾う[2)]．例えば次のように境界条件を数式表現する．



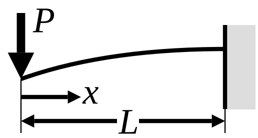
左のはりでは，壁のところは変位せず $y(L) = 0$，傾きも 0 のまま $\frac{dy}{dx}(L) = 0$ である．他方，右のはりでは，左右の支持点は変位しないから $y(0) = 0$，$y(L) = 0$ と拾える．

4.3　計算ドリル

曲げモーメント $M(x)$ は既知とする．

4.3.1　集中荷重を受ける片持はり

はりと曲げモーメントを示す．



$$M(x) = -Px$$

課題 11 (集中荷重を受ける片持はり)　(1) 2 回積分して，たわみ量 $y(x)$ とたわみ角 $\tan^{-1}\frac{dy}{dx}(x)$ を計算せよ．(2) 境界条件を数式表現し，積分定数を消去せよ．

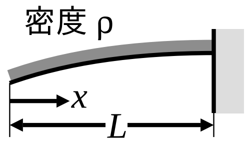
---

1) 自由落下運動の初期位置 $x(0)$ および初速度 $v(0)$ と同じ役割．

2) ようは「あたり前だろ」的な特徴点から拾う．例えば支持点で変位 (たわみ)0 は「あたり前だろ」？

4.3.2　等分布荷重を受ける片持はり

はりと曲げモーメントを示す．

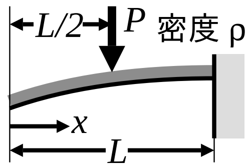


$$M(x) = -\frac{\rho}{2}x^2$$

課題 12 (等分布荷重を受ける片持はり)　(1) 2 回積分して，たわみ量 $y(x)$ とたわみ角 $\tan^{-1}\frac{dy}{dx}(x)$ を計算せよ．(2) 境界条件を数式表現し，積分定数を消去せよ．

4.3.3　集中荷重と等分布荷重を受ける片持はり

次の問題は，曲げモーメントが**区分関数** (場合分けを含む関数) となる．したがって区分関数の扱いに慣れていないと解けない．いまここでマスターしてしまおう．「つなぎ目」で境界条件を拾うのがポイントである．



$$M(x) = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{2}x^2 & (0 \le x < L/2) \\ -\dfrac{\rho}{2}x^2 - P\Big(x - \dfrac{L}{2}\Big) & (L/2 \le x < L) \end{cases}$$

課題 13 (集中荷重と等分布荷重を受ける片持はり)　(1) 2 回積分して，たわみ量 $y(x)$ とたわみ角 $\tan^{-1}\frac{dy}{dx}(x)$ を計算せよ．(2) 境界条件を数式表現し，積分定数 (今度は 4 つある!) を消去せよ．

4.4　手本

老婆心ながら，**微積分学の基本定理**

$$\int \frac{df(x)}{dx}dx = f(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\Longleftrightarrow \ f(x) = \int \frac{df(x)}{dx}dx + C' \quad (C' \text{ は積分定数})$$

を用いる．心底どうでもいいことだが，$f(x) = Ag(x)$ (A は定数) の場合は

$$f(x) = \int \frac{df(x)}{dx}dx + C' = A\int \frac{dg(x)}{dx}dx + C'$$

$$= A\left(\int \frac{dg(x)}{dx}dx + C''\right) \quad (C'' \equiv C'/A \text{ は積分定数})$$

とでも変形して使うと積分定数の計算が楽である．失礼しました．

Answer. 課題 11 (p.28) (集中荷重を受ける片持はり)

(1)　与えられた $M(x) = -Px$ を代入して積分する．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{P}{EI}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\left(\int x\,dx + C_1\right) = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)$$

(C_1 が任意なら PC_1/EI も任意)

$$y = \frac{P}{EI}\left(\int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)dx + C_2\right) = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2\right)$$

(2)　境界条件は，壁面 $(x = L)$ で，傾き=0，変位=0 より

$$\frac{dy}{dx}(L) = 0, \quad y(L) = 0$$

と数式表現できる．これより

$$\frac{dy}{dx}(L) = \frac{P}{EI}\left(\frac{L^2}{2} + C_1\right) = 0 \implies C_1 = -\frac{L^2}{2}$$

$$y(L) = \frac{P}{EI}\left(\frac{L^3}{6} + C_1L + C_2\right) = 0 \implies C_2 = \frac{L^3}{3}$$

以上，境界条件から次のような積分定数が判明した．

$$C_1 = -\frac{L^2}{2}, \quad C_2 = \frac{L^3}{3}$$

これらを代入して，はりの傾き $\frac{dy}{dx}(x)$ と，たわみ曲線 $y(x)$ を得る．

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2}\right)$$

$$y(x) = \frac{P}{EI}\left(\frac{L^3}{6} - \frac{L^2}{2}x + \frac{L^3}{3}\right)$$

はりの傾き $\frac{dy}{dx}(x)$ を**たわみ角** $i(x)$ として表示する場合は

$$i(x) = \tan^{-1}\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2}\right)$$

と書けばよいのであった．　**END**

Answer. 課題 12 (p.29) (等分布荷重を受ける片持はり)

(1)　与えられた $M(x) = -\rho x^2/2$ を代入して積分する．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{\rho}{2\,EI}x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\int x^2\,dx + C_1\right) = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)$$

$$y = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\int\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)dx + C_2\right) = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{x^4}{12} + C_1x + C_2\right)$$

(2) 境界条件は，壁面 $(x = L)$ で，傾き=0，変位=0 より

$$\frac{dy}{dx}(L) = 0, \quad y(L) = 0$$

と数式表現できる．これより

$$\frac{dy}{dx}(L) = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{L^3}{3} + C_1\right) = 0 \implies C_1 = -\frac{L^3}{3}$$
$$y(L) = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{L^4}{12} + C_1 L + C_2\right) = 0 \implies C_2 = \frac{L^4}{4}$$

以上，境界条件から次のような積分定数が判明した．

$$C_1 = -\frac{L^3}{3}, \quad C_2 = \frac{L^4}{4}$$

これらを代入して，はりの傾き $\frac{dy}{dx}(x)$ と，たわみ曲線 $y(x)$ を得る．

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}(x) = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{L^3}{3}\right)$$
$$y(x) = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{L^3}{3}x + \frac{L^4}{4}\right)$$

はりの傾き $\frac{dy}{dx}(x)$ を**たわみ角** $i(x)$ として表示する場合は

$$i(x) = \tan^{-1}\frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{L^3}{3}\right)$$

と書けばよいのであった． **END**

Answer. 課題 13 (p.29) (集中荷重と等分布荷重を受ける片持はり)

Q．こんどは $M(x)$ が 2 個ある．どうすればよいか？

A．区間ごとに個別に積分して後でくっつける．が常套手段．

(1) というわけで 2 区間に分けて積分しよう．積分定数の消去に備えて若干工夫しながらやってみる．

a) $0 \le x < L/2$**:** $M(x) = -\rho x^2/2$ は課題 12 (p.29) と同じなので，積分定数だけ定義し直して流用する．

$$\frac{dy_1}{dx}(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^3}{6} + C_1\right)$$
$$y_1(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^4}{24} + C_1 x + C_2'\right)$$
$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^4}{24} + C_1\left(x - \frac{L}{2}\right) + C_2\right), \qquad C_2 \equiv C_2' + C_1\frac{L}{2}$$

b) $L/2 \le x < L$**:** $M(x) = -\rho x^2/2 - P(x - L/2)$ である．

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}(x) = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{\rho}{EI}\frac{x^2}{2} + \frac{P}{EI}\Big(x - \frac{L}{2}\Big) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^2}{2} + P\Big(x - \frac{L}{2}\Big)\right)$$

$$\frac{dy_2}{dx}(x) = \frac{1}{EI}\left(\int \frac{d^2y_2}{dx^2}dx + D_1'\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^3}{6} + \frac{P}{2}\Big(x - \frac{L}{2}\Big)^2 + D_1\right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{EI}\left(\int \frac{dy_2}{dx}dx + D_2\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^4}{24} + \frac{P}{6}\Big(x - \frac{L}{2}\Big)^3 + D_1\Big(x - \frac{L}{2}\Big) + D_2\right)$$

(2)　課題 12 (p.29) までと同様に，壁のところで 2 個の境界条件

$$\frac{dy_2}{dx}(L) = 0, \quad y_2(L) = 0$$

を拾えるが，こんどは未知数が C_1, C_2, D_1, D_2 と 4 つあるので方程式が足りない．そこで，区間ごとに求めた $\frac{dy_1}{dx}(x)$ と $\frac{dy_2}{dx}(x)$，および $y_1(x)$ と $y_2(x)$ を境界で継ぐ．これで方程式を 2 本増やせる．

つまり，2 区間に分けたのは計算の都合であって，はり自体は一体である．実際のはりは，y_1 と y_2 のつなぎ目 $x = L/2$ で滑らかにつながっている．そうなるためには，

$$y_1(L/2) = y_2(L/2), \quad \frac{dy_1}{dx}(L/2) = \frac{dy_2}{dx}(L/2)$$

でなければならない．なぜなら，$y_1(L/2) \neq y_2(L/2)$ だとつなぎ目に「段差」があり，$\frac{dy_1}{dx}(L/2) \neq \frac{dy_2}{dx}(L/2)$ だとつなぎ目に「折れ」があることになってしまう．以上，4 つの境界条件

$$\frac{dy_2}{dx}(L) = 0, \quad y_2(L) = 0, \quad y_1(L/2) = y_2(L/2), \quad \frac{dy_1}{dx}(L/2) = \frac{dy_2}{dx}(L/2)$$

で 4 つの未知数 C_1, C_2, D_1, D_2 を消去する．手始めに壁からたどると，

$$\frac{dy_2}{dx}(L) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho L^3}{6} + \frac{P}{2}\Big(L - \frac{L}{2}\Big)^2 + D_1\right) = 0$$

$$\Longrightarrow D_1 = -\frac{\rho L^3}{6} - \frac{PL^2}{8}$$

$$y_2(L) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho L^4}{24} + \frac{P}{6}\Big(L - \frac{L}{2}\Big)^3 + D_1\Big(L - \frac{L}{2}\Big) + D_2\right) = 0$$

$$\Longrightarrow D_2 = \frac{\rho L^4}{24} + \frac{PL^3}{24}$$

次に，つなぎ目 $x = L/2$ で

$$\frac{dy_1}{dx}(L/2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho L^3}{48} + C_1\right) = \frac{dy_2}{dx}(L/2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho L^3}{48} + D_1\right)$$

$$\Longrightarrow C_1 = D_1 = -\frac{\rho L^3}{6} - \frac{PL^2}{8}$$

$$y_1(L/2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho L^4}{24 \cdot 16} + C_2\right) = y_2(L/2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho L^4}{24 \cdot 16} + D_2\right)$$

$$\Longrightarrow C_2 = D_2 = \frac{\rho L^4}{24} + \frac{PL^3}{24}$$

以上，積分定数が全て定まった．代入すれば，はりの傾き $\frac{dy}{dx}(x)$ と，たわみ曲線 $y(x)$ が確定する．両者とも区分関数である．

といって終ってしまうのも味気ないので，気楽に計算できる特性量だけ押えておこう．まず，たわみ $y(x)$ の最大値 $y_{\max}$ は図より左端で生じる．その値は $y_1(0)$ だが，

$$y_{\max} = y_1(0) = \frac{1}{EI}\left(-C_1\frac{L}{2} + C_2\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho L^4}{8} + \frac{5PL^3}{48}\right)$$

同じく，最大のたわみ角 $i_{\max}$ は

$$i_{\max} = \tan^{-1}\frac{dy_1}{dx}(0) = \tan^{-1}\frac{1}{EI}(C_1) = \tan^{-1}\frac{1}{EI}\left(-\frac{\rho L^3}{6} - \frac{PL^2}{8}\right)$$

である．お疲れさまでした． **END**

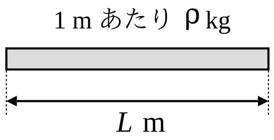
5

荷重の数学モデル

前章までに，曲げモーメント $M(x)$ からたわみ曲線 $y(x)$ に至る算術を体得した．あとは**荷重**から**曲げモーメント**に至る理論的なルートを確保してやればよい．手始めに荷重を数式表現する．分布荷重と集中荷重を 1 本の式で数式表現できれば目標達成．

5.1 荷重の幾何学

次の分布荷重を考える．1 m あたり ρ kg の均等な荷重である．



この荷重の総荷重 W を求めたい．最も素朴に**掛け算**を使うと，直観的に

$$W = \rho \times L \tag{5.1}$$

となる．上式を大学レベルの知性で解釈すると，右辺の掛け算は

- 底辺 L，高さ ρ の長方形の**面積**

を求める数学的操作と区別できない．つまり，**総荷重**を求めるという物理量の計算が，**面積**[1]を求めるという幾何学量の計算に帰着してしまった[2]．

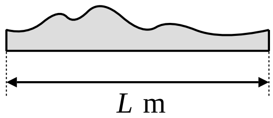
5.2 積分

それでは，荷重の分布が均等でないときはどうするか．

---

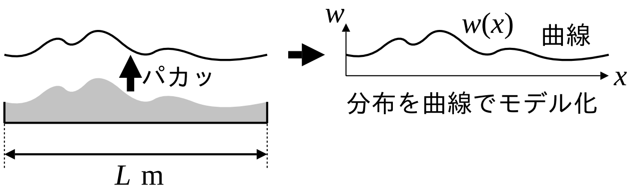
[1] 本質的には**体積**．ここでは奥行きを無視している．

[2] 人類はこの発見に，「太陽が東から昇る」といった事実の発見とは比較にならない多大な年月を要したはずである．



太陽系第 3 惑星の知的生命が出した答は**積分**である．

さきに述べたとおり荷重の表現は幾何学に帰着するが，平面に描かれた任意の線画を表現する数学モデルは曲線である．そこで，この面積を囲む境界を**曲線** $w(x)$ でモデル化するのである．この曲線 $w(x)$ を**荷重分布関数**と呼ぶ．



このようにモデル化すると，総荷重 W は曲線 $w(x)$ の下の面積として**積分**

$$W = \int_0^L w(s)ds \tag{5.2}$$

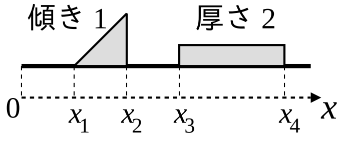
で書ける．この種の積分法は，現在までに数学者達によって完全に整備されており，その解説書 (微積の教科書) も容易に入手可能だから，W は計算可能である．以上をまとめると

算法 1 (荷重分布関数): 荷重分布を 1 変数関数 $w(x)$ で数式表現する．$w(x)$ を**荷重分布関数**と呼ぶ．($w(x)$ は幾何的には曲線である) □

以上，荷重を曲線 $w(x)$ でモデル化したとたん，総荷重 W の計算が，(5.2) の積分という単なる計算ドリルに帰着した．

課題 14　1 m あたり ρ kg の均等な荷重の総荷重を，掛け算ではなく積分で表示せよ．この積分を実行せよ．

教養数学レベルでは以上の話で十分だが，我々は工学のプロである．次の程度が数式表現できないと仕事にならない．



課題 15 (区分関数の積分)　上図の分布荷重を，2 つの曲線の和として数式表現せよ．これを積分して総荷重を求めよ．

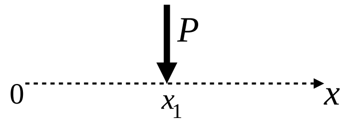
(ヒント: 諸君があまり訓練されていない区分関数の積分となる)

5.3　集中荷重

以上，分布荷重の数式表現について学んだが，論法は

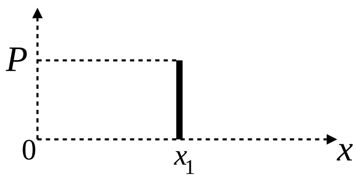
- 荷重を曲線 $w(x)$ でモデル化する．
- $w(x)$ を積分すると総荷重 W が求まる．

であった．残るは集中荷重である．(下図)



このような集中荷重に対しても，同じ論法を適用できれば都合がよい．どうするか？

まずは失敗してみよう．集中荷重とは点荷重のことだから底辺の幅は 0 である．そこで高さ P 幅 0 の線分で集中荷重をモデル化してみる．



$$w(x) = \begin{cases} P & (x = x_1) \\ 0 & (x \neq x_1) \end{cases}$$

一見もっとも風だが，これでは積分値が現実に合わない．なぜなら，底辺 0，高さ P の線分の面積は 0 となり，計算上

$$W = \int w(x)dx = 0$$

になってしまう．現実の総荷重は P であり 0 ではない．以上，算術化失敗[3]．

よく考えてみると，そもそも集中荷重のモデルとして我々が求めるのは

- 底辺の幅が 0 ($x = x_1$ 以外で関数値 0)
- なのに積分値は P

というワガママな関数，つまり

$$\int w(x)dx = P \quad \text{かつ} \quad w(x) = 0 \ (x \neq x_1)$$

である．同じ問題に直面したディラック[4]は，ちょっと強引に，次の関数を定義した．

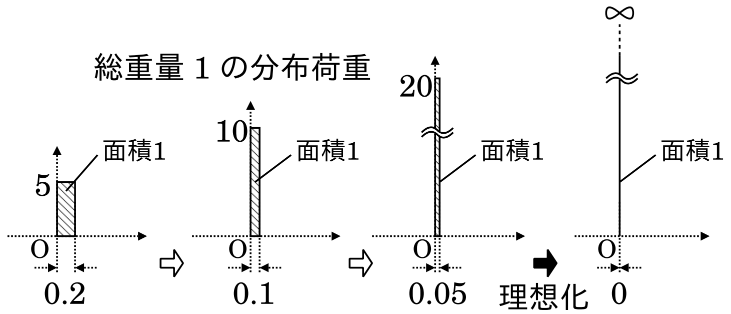
$$\int \delta(x)dx = 1 \quad \text{かつ} \quad \delta(x) = 0 \ (x \neq 0) \tag{5.3}$$

この $\delta(x)$ を (ディラックの) デルタ関数と呼ぶ．物理的なイメージは

---

[3] 理論物理学者は，このような頭の使い方をする．現実と計算結果が一致するような算術をあみだす．

[4] P.A.M. Dirac (1902-1984): 量子力学を作った物理学者の 1 人



である．原点にそそり立つ高さ ∞ の分布荷重で，幅 0 で総荷重 1 である[5)]．

このデルタ関数 $\delta(x)$ を用いて，集中荷重を次のように数式表現する．

算法 2 (集中荷重の数学モデル): $x = x_1$ に位置する大きさ P の集中荷重の荷重分布を，次のように数式表現する．

$$w(x) = P\delta(x - x_1) \tag{5.4}$$

ここに $\delta(x)$ は (ディラックの) デルタ関数である． □

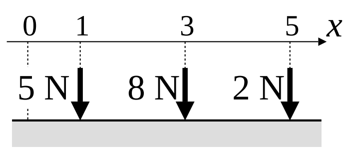
(5.4) は，$\delta(x)$ の面積 1 を P 倍し，ピーク位置を原点から $+x_1$ 平行移動したものである．定義 (5.3) より積分値は

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} P\delta(x - x_1)dx \\ &= P\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_1)dx = P \times 1 = P\end{aligned}$$

となり，したがって**算法 2** (p.37) によれば集中荷重の総和を積分で計算できる．

具体的な計算はさておき，まずは $\delta(x)$ を荷重の数式表現に使ってみよう．

課題 16 (集中荷重の数式表現)　床面 (ハッチング) にかかる荷重を荷重分布関数 $w(x)$ として数式表現せよ．デルタ関数を用いよ．

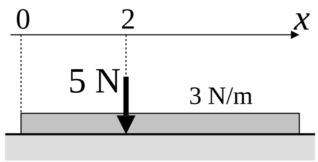


さらに，分布荷重と集中荷重が混在した状況も一発でメモれる．

課題 17 (集中荷重と分布荷重の数式表現)　床 (斜線部) にかかる荷重を荷重分布関数 $w(x)$ として数式表現せよ．デルタ関数を用いよ．

---

5) 当初，数学者達はこの妙チクリンな関数を毛嫌いしたらしい．にもかかわらず，物理学者や工学者は，おかまいなしに使い始めた．数学ではなく算術が欲しかったのである．



以上，分布荷重と集中荷重を 1 本の式で数式表現できた．目標達成.

5.4　手本

Answer. 課題 15 (p.35) (区分関数の積分)

まず第 1 のコツとして，区分関数を数式表現するときはグラフの平行移動をうまく用いる．すなわち，三角のほうが傾き 1 の直線を x 方向に $+x_1$ 平行移動したものであることに注意すると

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

$$\text{ただし}\quad w_1(x) \equiv \begin{cases} x - x_1 & (x_1 \le x < x_2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$w_2(x) \equiv \begin{cases} 2 & (x_3 \le x < x_4) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と数式表現できる．第 2 のコツとして，区分関数を積分するときは積分区間をうまく分割する．すなわち，関数値 0 の定義域とそれ以外を分けて

$$\begin{aligned} W &= \int_0^L w(x)dx \\ &= \int_0^{x_1} w(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} w(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} w(x)dx \\ &= \int_0^{x_1} 0dx + \int_{x_1}^{x_2} w_1(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} 0dx + \int_{x_3}^{x_4} w_2(x)dx \\ &= 0 + \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)dx + 0 + \int_{x_3}^{x_4} 2dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x_1 x\right]_{x_1}^{x_2} + [2x]_{x_3}^{x_4} \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - x_1(x_2 - x_1) + 2(x_4 - x_3) \\ &= \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} + 2(x_4 - x_3) \end{aligned}$$

と積分できる． **END**

Answer. **課題 16** **(p.37)** **(集中荷重の数式表現)**

デルタ関数とは極端に局在した区分関数だから，数式表現のコツはやはり平行移動である．最初なので詳しくいこう．まず集中荷重 1 N (面積 1) を原点に作ると $\delta(x)$ となる．もし 5 N (面積 5) ならば $5\delta(x)$ である．ところで問題の 5 N は $x = 1$ に位置するから，x 方向に $+1$ 平行移動して $5\delta(x-1)$ と数式表現される．同様に考えて

$$w(x) = 5\delta(x-1) + 8\delta(x-3) + 2\delta(x-5)$$

と数式表現できる． **END**

Answer. **課題 17** **(p.37)** **(集中荷重と分布荷重の数式表現)**

基本的に前問と全く同様だが，特に 3 N/m の等分布荷重は定数関数であり，幾何学的には傾き 0 の直線 (水平線) である．ゆえに数式表現は

$$w(x) = 3 + 5\delta(x-2)$$

となる．

老婆心ながら一言．分布荷重の数式表現を $3x$ としてしまう誤解が多い．これは無意識に位置 x までの累積荷重を求めてしまう誤解である．あくまで「分布」を数式表現しているのだから，等分布 荷重は 定数 関数である． **END**

Note (工学理論と計器飛行): パイロットは視界ゼロのとき計器飛行を行うが，技術者にとっての計器飛行術が工学理論である．抽象理論ほどゼロ視界に強い．例えば理論屋は無限次元空間というのを扱うが，こんなものは人間である以上どんな天才の目にも見えない．どうするかといえば，視界ゼロのまま計器飛行で研究を進めるのである．本書の材料力学は計器飛行の材料力学である．これを身につけると，初心者ドライバが速度計を頼りに速度調整するように，手計算によって自らの物理的直観を調整できるようになる．理論とは視界ゼロのときにこそ頼りにすべきものだと思う．

6

デルタ関数と累積荷重

荷重分布関数 $w(x)$ を積分すると累積荷重が求まるが，求まった累積荷重が**せん断力** $F(x)$ そのものとなる．この $F(x)$ をもう 1 回積分すると**曲げモーメント** $M(x)$ になる．都合 $w(x)$ を 4 回積分すると**たわみ量** $y(x)$ までたどりつくのだが，そのために必要な算術を身につけてしまおう．デルタ関数が定積分できれば目標達成．

6.1 デルタ関数

デルタ関数 $\delta(x)$ を使うと，集中荷重と分布荷重を一発で数式表現できた．デルタ関数用の演算法則は既に整備されているので，三角関数などと同列に利用できる[1)]．ゆえに集中荷重は計算可能である．まず定義からいこう．定義は次のように積分形式で為される．

定義 4 (デルタ関数): 次の条件を満足する関数 $\delta(x)$ を (ディラックの) デルタ関数と呼ぶ．

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1\right) \quad \text{かつ} \quad \left(\delta(x) = 0 \quad \text{if } x \neq 0\right) \tag{6.1}$$

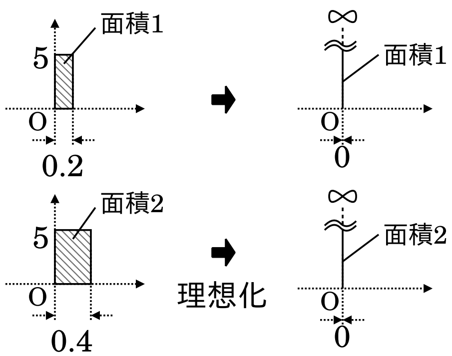
□

このようにデルタ関数 $\delta(x)$ の関数形は直接定義されない．代りに，積分演算の法則のみが定義される[2)]．その理由は，デルタ関数のピーク値 $\delta(0)$ を数で表示できないからである．

Note: デルタ関数も，ピーク以外では普通の関数と同じように関数値を $\delta(x) = 0$ $(x \neq 0)$ と表示できるのだが，同じようにピークの値 $\delta(0)$ まで定めてしまうと論理的な整合性が保てない．ちょっとやってみると，例えばピークの値を $\delta(0) = \infty$ と定めてしまうと，

[1)] 業界での普及度は三角関数に匹敵する．例えば制御理論はデルタ関数なしには計算不可能．

[2)] この定義を満す関数って 1 通りに決まるの？ 微分とか出来るの？ などなど数学者の疑問は尽きず，本当の解決までしばらくかかった．結果的には**超関数**という新概念が解決した．



となり，元の面積が 1 でも 2 でも高さは同じく ∞ となるから，面積の違いが区別できない．すなわち，幅 0 高さ ∞ の図形の面積は確定せず，したがって逆算もできないのである (ゆえに微積分学では ∞ は数でないと定める)．そこで，ピークの値 $\delta(0)$ を使わずに，面積のほうを定義するという，巧妙な方法論が考案されたわけだ．

算法 3 (デルタ関数の積分公式): **定義 4** (p.40) から次の公式が帰結される．

(D1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$

(D2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$ □

課題 18 **定義 4** (p.40) より**算法 3** (p.41) を導け．

公式 (D2) によれば，$x=a$ にピークを持つ $\delta(x-a)$ に関数 $f(x)$ を掛けて積分すると，ピーク位置 $x=a$ での関数値 $f(a)$ が求まる．直観的には，

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bullet)\delta(x-a)dx$$

の $(\bullet)$ の部分を，位置 $x=a$ に開けられた，縦スリット状の覗き穴と見なすとよいかも知れない．そこからは関数 $f(x)$ の $f(a)$ の部分だけが見える．

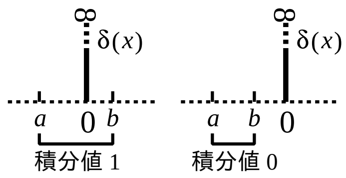
課題 19 $f(x)=x^2$ とする． $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-5)dx$ の値を求めよ．

6.2 デルタ関数の積分法

デルタ関数の積分法とは，**算法 3** (p.41) の証明そのものなので，**算法 3** (p.41) の証明を真似すれば本書の積分計算は全て実行できるが，同じことを少し実用的に整理しておく．デルタ関数を有限の積分範囲で定積分できれば目標達成．

6.2.1 $\delta(x)$ の積分

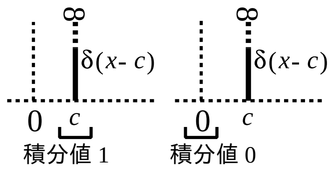
デルタ関数のピークにかかる範囲で積分すれば積分値は 1 である (下図左)．逆に，ピークがない範囲で積分すると積分値は 0(下図右)．



$$\int_a^b \delta(x)dx = 1 \quad \text{if } a < 0 < b, \qquad \int_a^b \delta(x)dx = 0 \quad \text{if } a < b < 0$$

積分範囲に $\delta(x)$ のピークが存在すれば総面積は 1，存在しなければ面積 0 となるから，当然の帰結である．

原点以外にピークが欲しければ平行移動して使う．(下図)



同じく，積分範囲が $\delta(x-c)$ のピークにかかれば積分値は 1，かからなければ積分値は 0 である．

課題 20　デルタ関数のピーク位置と積分範囲の関係を図示し，積分を実行せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \delta(x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{1}^{2} \delta(x)dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{2} \delta(x-1)dx$　　(4) $\displaystyle\int_{0}^{2} \delta(x-3)dx$

6.2.2　$\delta(x)$ の定数倍の積分

結論からいうと普通の積分と同様に定数は外にでる．例えば k が定数なら

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x)dx = k\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = k \tag{6.2}$$

課題 21 (定数倍の積分)　試しに算法 3 (p.41) のみから (6.2) を導いてみよ．

以上の公式を利用して，$x = x_1$ に位置する集中荷重の荷重分布を

$$w(x) = P\delta(x - x_1)$$

と数式表現するのである．位置 x までの**累積荷重** (次節参照) は

$$\int_0^x P\delta(s - x_1)ds = \begin{cases} 0 & (x < x_1) \\ P & (x_1 \leq x) \end{cases} \tag{6.3}$$

となり，物理と算術が矛盾しない．

課題 22　(6.3) の状況をスケッチせよ.

その他，デルタ関数の微分演算なども存在するが，詳しくは参考書 [3, 4] を参照のこと.

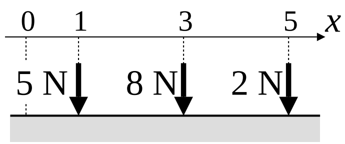
6.3　累積荷重

せん断力の計算とは，すなわち**累積荷重**の計算である. 累積荷重は，数学的には積分の上限 x を独立変数に持つような，積分形式の関数になる.

$$f(x) = \int_0^x g(s)ds$$

課題 23 (積分形式の関数表示)　関数 $f(x) = x^2$ を積分形式で表示せよ.

ここでは単なる数学の演習問題として，下図のような集中荷重について，左端 $(x = 0)$ から位置 x までの累積荷重を計算してみる.



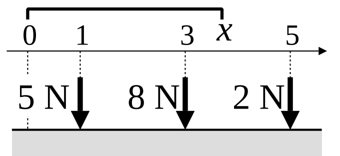
まず，**荷重分布関数**は

$$w(x) = 5\delta(x-1) + 8\delta(x-3) + 2\delta(x-5)$$

と書けるから，左端 $(x = 0)$ から位置 x までの累積荷重 $W(x)$ は，積分形式で次のように書ける.

$$\begin{aligned} W(x) &= \int_0^x \big(5\delta(s-1) + 8\delta(s-3) + 2\delta(s-5)\big)ds \\ &= 5\int_0^x \delta(s-1)ds + 8\int_0^x \delta(s-3)ds + 2\int_0^x \delta(s-5)ds \end{aligned}$$

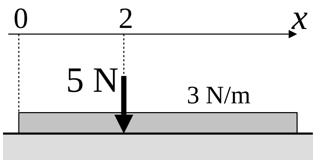
各項のピーク位置と積分範囲 $[0, x]$ の関係に注意すると (下図)



項別の積分値とその合計は下表のようになる.

x の値	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$5\int_0^x \delta(s-1)ds$	0	0	5	5	5	5	5	5
$8\int_0^x \delta(s-3)ds$	0	0	0	0	8	8	8	8
$2\int_0^x \delta(s-5)ds$	0	0	0	0	0	0	2	2
$W(x)$ (合計)	0	0	5	5	13	13	15	15

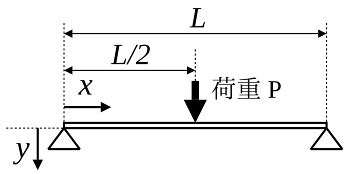
課題 24 (累積荷重)　下図の荷重について，左端 ($x=0$) から位置 x までの累積荷重を計算したい．荷重分布関数 $w(x)$ を書き下した後，表を埋めよ．



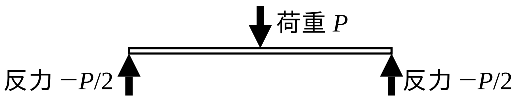
x の値	$0 \cdots\ 2 \cdots$
$W(x)$	

6.4　SFD と BMD への応用

9 章 (p.61) で詳しく述べるので，ここでは流れだけ観戦してほしい．以上に練習した累積荷重の積分計算と全く同様にして，荷重分布関数 $w(x)$ から曲げモーメント $M(x)$ が計算できる．例として**集中荷重を受ける単純支持はり**を考える．



荷重分布関数 $w(x)$　外力の数式表現から全てが始まる (まだ内力は無視)．上図のはりに作用する外力は，中央の**集中荷重**と両端の**反力**である．(下図)



定義 1 (p.8) に従い下向きを**外力の正方向**とすると，はりに作用する**荷重分布関数** $w(x)$ は次式となる．

$$w(x) = -\frac{P}{2}\delta(x) + P\delta(x-\frac{L}{2}) - \frac{P}{2}\delta(x-L)$$

せん断力 $F(x)$　次のように積分計算する．積分の中にマイナスをつけること以外は，累積荷重の計算そのものである．

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x -w(x)dx \quad \text{(マイナスに注意)} \\ &= \int_0^x \Big(\underbrace{\frac{P}{2}\delta(x)}_{\mathrm{A}} \underbrace{-P\delta(x-\frac{L}{2})}_{\mathrm{B}} \underbrace{+\frac{P}{2}\delta(x-L)}_{\mathrm{C}}\Big)dx \end{aligned}$$

積分の中のマイナスは「右が沈むとき正」と定義したせん断力の符号に計算結果を合せるためである．歴史的な慣習なので根拠はない[3]．

---

[3] むろん，せん断力の符号を「左が沈むとき正」と定義すれば，積分の中のマイナスは消える．そうしても理論的に矛盾は生じないが，たかが符号で独創的になっても不便なだけだと思う．

x	0	$\cdots$	$L/2$	$\cdots$	L
A	$P/2$	$P/2$	$P/2$	$P/2$	$P/2$
B	0	0	$-P$	$-P$	$-P$
C	0	0	0	0	$P/2$
$F(x)$	$P/2$	$P/2$	$-P/2$	$-P/2$	0

課題 25 (SFD)　$F(x)$ のグラフ[4)] (SFD) を描け．**定義 3 (p.14)** に基づき計算結果を説明せよ．

曲げモーメント $M(x)$　得られたせん断力 $F(x)$ をさらに累積すると曲げモーメント $M(x)$ になる．すなわち，上表の $F(x)$ を

$$M(x) = \int_0^x F(x)dx$$

により積分して曲げモーメント $M(x)$

$$M(x) = \begin{cases} \frac{P}{2}x & (0 < x < \frac{L}{2}) \\ \frac{PL}{4} - \frac{P}{2}(x - \frac{L}{2}) & (\frac{L}{2} < x < L) \end{cases}$$

を得る．$M(x)$ をさらに 2 回積分するとたわみ曲線 $y(x)$ が求まる[5)]．都合，荷重分布関数 $w(x)$ を 4 回積分するとたわみ曲線 $y(x)$ までたどりつく．

課題 26 (BMD)　$M(x)$ のグラフ[6)] (BMD) を描け．**定義 2 (p.13)** に基づき計算結果を説明せよ．

6.5　手本

Proof. 算法 3 (p.41) (デルタ関数の積分公式)

定義 4 (p.40) より，$x = 0$ 以外で $\delta(x) = 0$ だから，

$$f(x)\delta(x) = \begin{cases} f(x)\delta(x) & (x = 0) & = f(0)\delta(x) \\ f(x)0 & (x \neq 0) & = f(0)0 = 0 \end{cases}$$

ゆえに，被積分関数 $f(x)\delta(x)$ について，$f(x)$ を定数 $f(0)$ で置き換えても，積分値は数として変らない．ゆえに，

[4)] せん断力 $F(x)$ のグラフを，**せん断力図** (shearing force diagram) と呼び，SFD と略記する．

[5)] 既に学んだ．

[6)] 曲げモーメント $M(x)$ のグラフを，**曲げモーメント図** (bending moment diagram) と呼び，BMD と略記する．

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx &\overset{数}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(x)dx \\
&= f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx \quad (\text{積分の基本性質}) \\
&= f(0) \quad (\delta(x)\ \text{の定義})
\end{aligned}
$$

より公式 (D1) を得る．

公式 (D2) については，まず**定義 4** (p.40) を平行移動することにより，

$$
\begin{aligned}
&\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \quad \text{かつ} \quad x \equiv y - a \\
&\Longrightarrow \quad \delta(y-a) = 0 \quad (y - a \neq 0) \\
&\therefore \quad \delta(y-a) = 0 \quad (y \neq a)
\end{aligned}
$$

が判明する．これを同様に用いて

$$
f(x)\delta(x-a) = \begin{cases} f(x)\delta(x-a) & (x = a) \qquad = f(a)\delta(x-a) \\ f(x)0 & (x \neq a) \qquad = f(a)0 = 0 \end{cases}
$$

から

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx &\overset{数}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(x-a)dx \\
&= f(a)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx \quad (\text{積分の基本性質}) \\
&= f(a) \quad (\text{平行移動は面積を変えない})
\end{aligned}
$$

より公式 (D2) を得る． **END**

Answer. **課題 19 (p.41)**

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-5)dx = f(5) = 5^2 = 25
$$

END

Answer. **課題 20 (p.42)**

(1) 1,　(2) 0,　(3) 1,　(4) 0. **END**

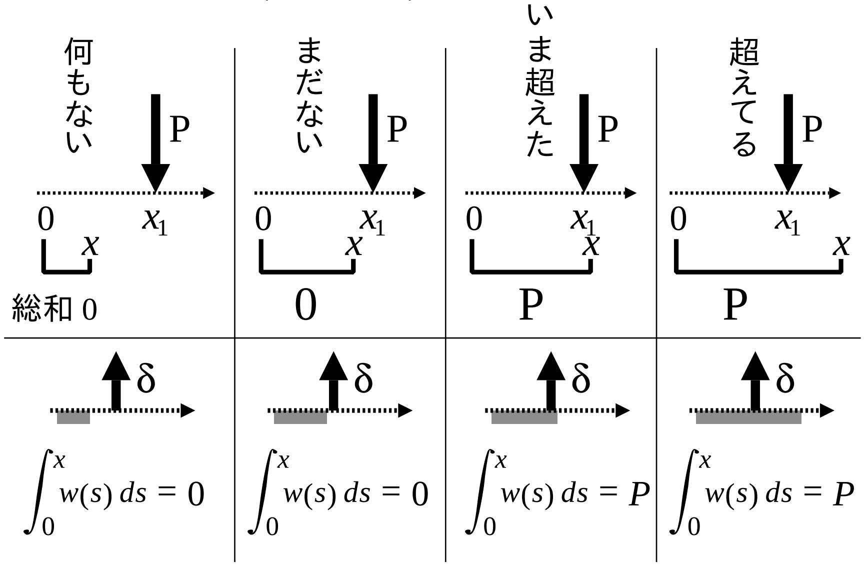
Answer. **課題 21 (p.42) (定数倍の積分)**

まず**定義** 4 (p.40) から**算法** 3 (p.41) が成立する．本問は**算法** 3 (p.41) の (D1) において $f(x) = k$ (定数) と置いた場合に相当するから

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x)dx = k \quad &(\text{公式 (D1)}) \\
= k \cdot 1 \quad &(\text{数の四則演算}) \\
= k\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \quad &(\delta\ \text{の定義})
\end{aligned}
$$

END

Answer. 課題 22 (p.43) (スケッチの例)



END

Answer. 課題 23 (p.43) (積分形式の関数表示)

$$f(x) = x^2 = \int_0^x 2xdx$$

END

Answer. 課題 24 (p.44) (累積荷重)

$w(x) = 3 + 5\delta(x-2)$ より，累積荷重 $W(x)$ は

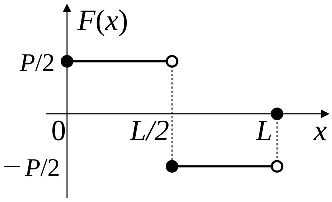
$$
\begin{aligned}
W(x) &= \int_0^x w(x)dx = \int_0^x 3 + 5\delta(x-2)dx \\
&= \int_0^x 3dx + 5\int_0^x \delta(x-2)dx
\end{aligned}
$$

となるから，下表のように項別に積分できる．

x の値	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$\int_0^x 3dx$	$3x$	$3x$	$3x$	$3x$
$5\int_0^x \delta(x-2)dx$	0	0	5	5
$W(x)$	$3x$	$3x$	$3x+5$	$3x+5$

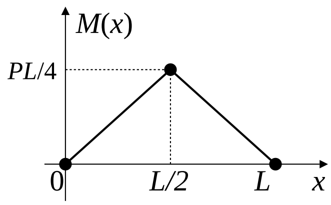
END

Answer. **課題 25 (p.45) (SFD)**



はりの仮想変位を考えると，$x=0$ から $x=L/2$ までは右が沈むから**定義** 3 (p.14) より正，$x=L/2$ から $x=L$ までは左が沈むから負であり，ちゃんと定義通りの符号が計算されている． **END**

Answer. **課題 26 (p.45) (BMD)**

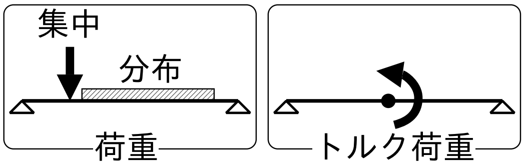


はりの仮想変位を考えると，全域で下に凸だから**定義** 2 (p.13) より正であり，定義通りの符号が計算されている． **END**

7

剛体のつり合い

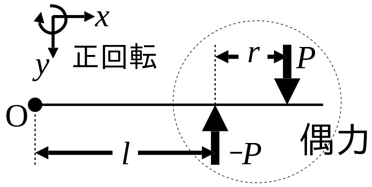
本章は，剛体の力学をうまく使えない人のための章である．使える人は飛してよい．さて，材料力学には並進性と回転性の 2 種類の荷重が登場する[1]．



これらの組み合せから 2 本の**つり合い式**が抽出できれば目標達成！

7.1　回転作用と変形作用

混同しがちな 2 つの作用を区別しておく．回転作用と変形作用が区別できたら目標達成．大前提として力学では回転作用を次のようにモデル化する．まず，方向と大きさが同じで逆向きの一組の力を考え，これを**偶力**と名付ける．(下図)



不思議なことに，剛体に作用する偶力は回転作用のみを与える．実際，上図の偶力が発生する原点 O 回りのトルク T を計算すると

$$T = -P \times l + P \times (l + r) = P \times r \tag{7.1}$$

となり，T の値は原点位置と無関係になる[2]．

[1] 荷重は**外力**であり内力とは別物．論理的に，原因が外力，結果が内力である．

[2] 日常感覚にない力学的直観を，新たに “足す” 気で違和感を克服しよう．剛体の力学という計器飛行術である．確かにこう計算してロケットが飛ぶ．

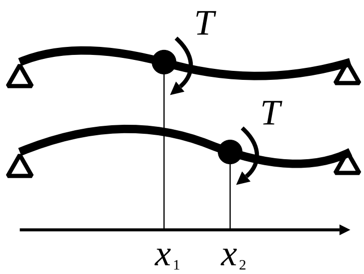
このように測った回転力 T を**偶力のトルク**と呼ぶ[3]．重大な帰結として，(7.1) から分るように，

- 偶力のトルクは，同じ回転面内なら，どの位置にあっても同じ回転作用を与える．

ここで，材料力学の**トルク荷重**とは，偶力のトルクをはりの 1 点に集中するようにかけたものである．現実には幅 0 ではねじれないから，あくまで理論上の外力である．トルク荷重は，次の 2 つの作用を発生する．

回転作用　トルク荷重の回転作用を理解するには，はりの**変形を無視**する．(7.1) によれば，同じトルク荷重 T を違う位置に作用させても，同じ偶力のトルクが計測される．変形を無視してなお残る性質を扱うのが剛体の力学だが，残った性質の 1 つが (7.1) なわけである．

変形作用　トルク荷重の変形作用を理解するには，はりの**変形を考慮**する．トルク荷重 T の大きさが同じでも，位置が違えば変形は異なる．(下図)



以上をまとめると，

0) トルク荷重は，変形作用と回転作用をはりに与える．
1) **回転作用**はトルク荷重の位置によらず**一定**である．
2) **変形作用**はトルク荷重の位置によって**変化**する．

性質 1) の数式表現が (7.1) であり，(7.1) を利用してトルクのつり合い式を導く．そのうえで，性質 2) の変形作用を解明するのが材料力学である．

7.2　2 つのつり合い式と静定荷重

これまでの考察をつり合い式の導出に応用しよう．材料力学は変形の力学だが，つり合い式を導くときだけ剛体の力学を使う．すなわち**変形を無視**する．

7.2.1　静定荷重の算出手順

※ くどいが変形は無視する．

---

[3] 偶力のモーメントという表現が一般的だが，本書では回転性の外力をすべてトルクと呼ぶ．

力のつり合い式の抽出

1) 基準点を定める．
2) すべての荷重を**平行移動**して基準点上に並べ，**力のつり合い式**を導く．
3) 荷重を元の位置に戻す．

トルクのつり合い式の抽出

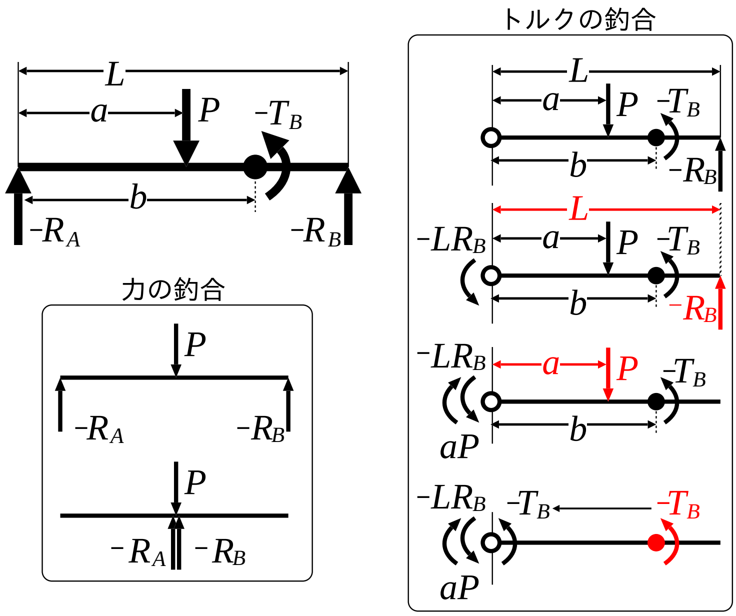
1) 基準点を定める．
2) 基準点に作用するトルクを全て足して**トルクのつり合い式**を導く．
3) 孤立した**トルク荷重**は，基準点まで**平行移動**し，**トルクのつり合い式**に加算する．
4) 全ての荷重の位置を元に戻して，変形の計算に備える．

以上で，2 本のつり合い式が得られる．これ以外のつり合い式は無い．

静定荷重の算出　以上の 2 つのつり合い式を連立して，算術的に**荷重**を定める．

7.2.2　算出例

例えば下図からつり合い式を抽出してみよう．このはりには，荷重 P と反力 R_A, R_B，およびトルク荷重 T_B が作用している．



力のつり合い式の抽出　荷重 P と反力 R_A, R_B を一直線に並べると

$$P - R_A - R_B = 0 \tag{7.2}$$

が導かれる．

トルクのつり合い式の抽出　左端を基準点とし，右ねじの方向 (時計まわり) を正回転とする (**定義 1** (p.8))．まず，反力 R_A は真下なので回転力 0 より無視．反力 R_B は負回転だから $-LR_B$ を発生し，荷重 P は正回転だから aP．トルク荷重 T_B を左端まで平行移動して

$$-LR_B + aP - T_B = 0 \tag{7.3}$$

が導かれる．

静定荷重の算出　(7.2) と (7.3) を連立して，未知数である反力 R_A, R_B が定まる．

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{(L-a)P + T_B}{L} \\ R_B &= \frac{aP - T_B}{L} \end{aligned} \tag{7.4}$$

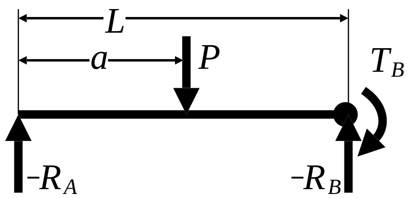
以上，材料力学を全く使わずに (変形を考慮することなく)，全ての荷重の値が定まった．このような荷重を**静定荷重**と呼ぶ．

7.2.3　不静定問題

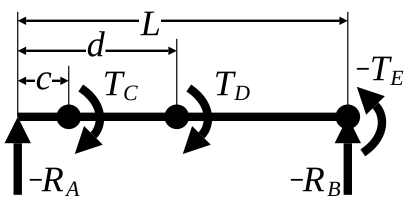
これに対して，剛体の力学だけでは定まらない荷重を**不静定荷重**と呼ぶ．静定荷重しかない問題を**静定問題**，不静定荷重のある問題を**不静定問題**と呼ぶ．

不静定問題では，未知数を含めたまま，これから学ぶ材料力学で変形を計算し，自明な変形の条件[4)]から，新たに 3 本目以降の方程式を作り[5)]未知数を消す．全ての未知数が消せたなら，そこに含まれる未知の荷重も必然的に定まっている．という手筈なわけである．

課題 27 (静定荷重 1)　つり合い式を 2 本導け．



課題 28 (静定荷重 2)　つり合い式を 2 本導け．



[4)] 支持点で変位 0 とか，壁面では傾き 0 とか，etc.

[5)] 1,2 本目は，力のつり合い式，トルクのつり合い式

7.3 分布荷重の重心

最後に，分布荷重がある場合のつり合い式を求めよう．手順は次の通り．

(1) 分布荷重 $u(x)$ の総和 U を求める．

(2) $u(x)$ の重心位置 $x = \bar{x}$ を定める．

(3) 便宜上，分布荷重 $u(x)$ を重心 $x = \bar{x}$ にある集中荷重 U と見なす．

(4) 7.2.1 節 (p.50) の手順でつり合い式を求める．

(5) 便宜上の集中荷重 U を，本来の分布荷重 $u(x)$ に戻す．

老婆心ながら，手順 (5) を忘れると酷いことになる (次節参照)．

ちなみに，微積分の教科書 [2] によれば，

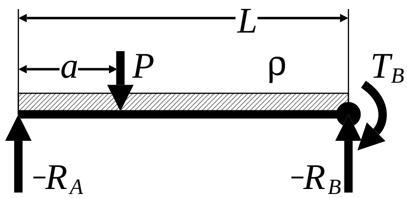
算法 4 (分布荷重の重心): 長さ L の分布荷重 $u(x)$ の重心位置 $\bar{x}$ は

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_0^L x\, u(x)dx}{\displaystyle\int_0^L u(x)dx} \tag{7.5}$$

である[6]．分母の U は $u(x)$ の総和である． □

気付いた諸君もいるかと思うが，公式 (7.5) は，確率論で出てくる期待値 (平均値) の計算と全く同形式である．発想も全く同じであり，ようするに一見無関係な力学と確率論に同じ算術が現れる[7]．

課題 29 (静定荷重 3) ポンチ絵からつり合い式を 2 本導け．



対称性から暗算した重心位置と，(7.5) から計算した重心位置が一致するかも確かめよ．

課題 30 (静定荷重 4) 前問の分布荷重 $u(x) = \rho$ を，$u(x) = x^2$ に変更したはりをスケッチせよ．重心位置を求め，つり合い式を 2 本導け．

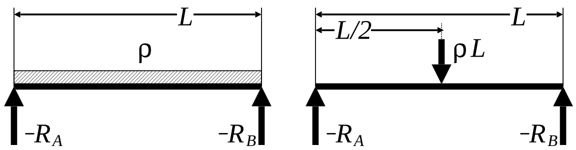
7.4 誤解の考察

分布荷重を含む問題においてつり合い式を導出するときは，分布荷重を等価な集中荷重に置き換えて考えるが，これからそのまま変形を計算してしまった答案をよく見かける．これは酷い間違いである．なぜなら下図の左右は**異なるはり**である．

---

[6] $u(x)$ がデルタ関数を含んでいても同じ公式で計算できる．

[7] 理工学に現れる算法の種類は有限な気がする．むろん新たな算法が発明される可能性は無限だが．



むろん変形も異なる．幅 0 の集中荷重を発生する身近な例は包丁だが，そう思って上図を見ると，右では棒にあてた包丁を ρL の力で押している．他方，左では棒全体を同じ力のコンニャクで均等に押している．包丁の刃先と均等なコンニャクがはりに同じ変形を与えるわけがない．ようするに，左右のはりは

- 剛体の力学では，同じ物体．(つり合い式の導出)
- 変形の力学では，異なる物体．(変形の計算)

なのである．全く同じ理由から，つり合い式の導出段階に限り，トルク荷重が平行移動できるわけだ．

7.5　手本

Answer. **課題 27 (p.52) (静定荷重 1)**

並進性の外力を 1 点に寄せると，力のつり合い式は

$$P - R_A - R_B = 0$$

基準点を左端にとると，P が発生するトルクは正回転 $+Pa$ で，$-R_B$ が発生するトルクは負回転 $-LR_B$ で，これらに T_B を平行移動して重ねると，トルクのつり合い式は

$$Pa - R_B L + T_B = 0$$

未知数は R_A と R_B の 2 つだから，この問題は静定問題である．

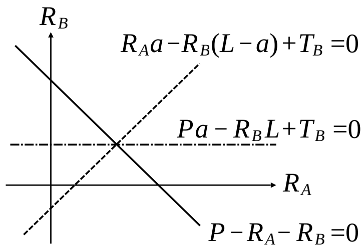
最初なので少し詳しく見よう．別解として基準点を $x = a$ に取ると，反力 $-R_A$ が発生するトルクは正回転，反力 $-R_B$ が発生するトルクは負回転で，これに T_B を平行移動して加算すると，トルクのつり合い式は

$$R_A a - R_B(L - a) + T_B = 0$$

となる．このように，基準点を変えると連立方程式も変るが，

$$\begin{cases} P - R_A - R_B = 0 \\ Pa - R_B L + T_B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} P - R_A - R_B = 0 \\ R_A a - R_B(L - a) + T_B = 0 \end{cases}$$

解 (交点) は同じである．下図に模式的に示す．



END

Answer. 課題 28 (p.52) (静定荷重 2)

前問と全く同様に考える．まず力のつり合い式について，並進力は $-R_A$ と $-R_B$ 以外に存在しないから，

$$-R_A - R_B = 0$$

トルクについては，左端を基準点とすると，トルク荷重を全て平行移動して

$$T_C + T_D - T_E - LR_B = 0$$

を得る．

老婆心ながら，トルク荷重の平行移動に対して不変なのは，あくまで剛体の力学である．変形を計算するときは，元の位置に戻さないと別の問題を解くことになってしまう．(誤解の考察参照) **END**

Answer. 課題 29 (p.53) (静定荷重 3)

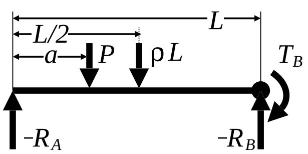
はりが左右対称なので直観的に解いたほうが速いが，早速 (7.5) を用いるなどして，ちょっと大げさに解いてみる．まず，分布荷重 ρ の総荷重は

$$U = \int_0^L \rho dx = [\rho x]_0^L = \rho L$$

重心位置 $\bar{x}$ は (7.5) より

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot \rho dx}{\rho L} = \frac{1}{\rho L}\left[\frac{\rho x^2}{2}\right]_0^L = \frac{1}{\rho L}\frac{\rho L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

と求まる．ここで，いま行っているつり合い式の導出段階に限り，分布荷重 $u(x) = \rho$ を $x = L/2$ に位置する等価な集中荷重 ρL に置き換える．



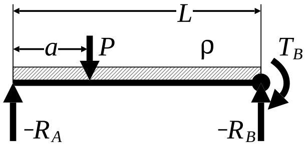
上図から，まず力のつり合い式は

$$P + \rho L - R_A - R_B = 0$$

トルクのつり合い式は，左端を基準として

$$aP + \frac{L}{2} \cdot \rho L - LR_B + T_B = 0$$

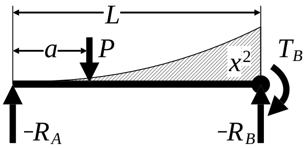
となる．以上，つり合い式が求まったので，剛体力学用の便宜的な集中荷重 ρL は破棄し，本来の分布荷重 $u(x) = \rho$



に戻す． **END**

Answer. 課題 30 (p.53) (静定荷重 4)

問題のはりは次のようにスケッチできる．この問題は直観的には解けないと思う．



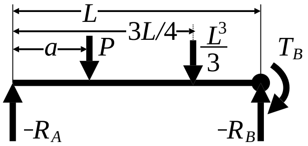
まず，分布荷重 $u(x) = x^2$ の総荷重 U は

$$U = \int_0^L x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{L^3}{3}$$

重心位置 $\bar{x}$ は (7.5) より

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \cdot x^2 dx}{L^3/3} = \frac{3}{L^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^L = \frac{3}{L^3}\frac{L^4}{4} = \frac{3L}{4}$$

と求まる．ここで，いま行っているつり合い式の導出段階に限り，分布荷重 $u(x) = x^2$ を $x = 3L/4$ に位置する等価な集中荷重 $L^3/3$ に置き換える．



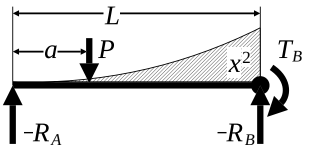
上図から，まず力のつり合い式は

$$P + \frac{L^3}{3} - R_A - R_B = 0$$

トルクのつり合い式は，左端を基準として

$$aP + \frac{3L}{4} \cdot \frac{L^3}{3} - LR_B + T_B = 0$$

となる．以上，つり合い式が求まったので，剛体力学用の便宜的な集中荷重 $L^3/3$ は破棄し，本来の分布荷重 $u(x) = x^2$



に戻す． **END**

8

トルク荷重の数学モデル

そろそろ本書も終りに近づいたので，トルク荷重の数式表現を片づけてしまおう．これと集中荷重の数式表現を組み合せれば，はりの計算に出てくる荷重は，例外なく数式で書ける．トルク荷重が 1 点集中のせん断力を発生し，その数学モデルがデルタ関数になることを実感できれば目標達成である．

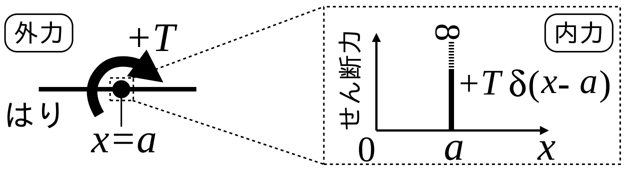
8.1 集中せん断力

集中せん断力は著者の造語であり，材料力学の教科書には出てこない．具体的な使い方は次の通り．

算法 5 (トルク荷重の数学モデル): $x = a$ に位置する**トルク荷重** T を

$$G(x) \equiv T\ \delta(x - a) \tag{8.1}$$

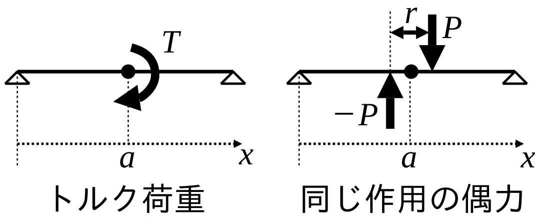
のように数式表現する．この $G(x)$ を本書では**集中せん断力**と呼ぶ．□



集中せん断力 $G(x)$ の物理的な意味は明白である．まず，回転性の力を扱うための常套手段として，トルク荷重 T と同じ回転作用を持つ**偶力**

$$T = P \times r$$

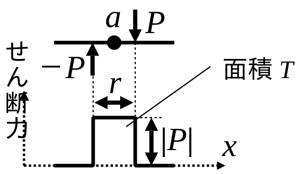
を考える．与えられた T の数値を，P と r へどのように分配するかは現時点では決めないでおく．



この偶力の荷重分布関数は，点 $x = a$ の近所で

$$w(x) = \quad \cdots - P\delta(x - a + r/2) + P\delta(x - a - r/2) + \cdots$$

のように書ける (線分 r の中点を $x = a$ とした)．ということは，この偶力は $x = a$ の近所で次のようなせん断力を発生する (右が沈むから正)．



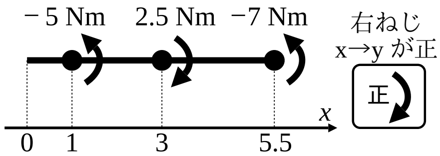
以上をまとめると，

- 偶力 $P \times r$ を作用させたはりの内部には，幅が r で大きさ P のせん断力が発生する．

さて，そもそもトルク荷重とは何であったかを思い出すと，トルク荷重とははりの 1 点に集中してかける回転性外力のことであった．同じことを偶力で表現するには，トルク T を一定に保ったまま，偶力 $T = P \times r$ の幅 r を 0 まで絞ればよい．幅を 0 にされてトルク荷重と化した偶力が発生するせん断力は ∞ である．これを幾何的に解釈するとデルタ関数が浮上する．すなわち，面積 T を一定のまま幅を 0 に絞ったものの数学モデルは $T\delta(\cdots)$ である．

以上，はりの位置 $x = a$ にトルク荷重 T を作用させると，はりの内部にはデルタ関数上のせん断力 $G(x) = T\delta(x - a)$ が発生する．この内力 $G(x)$ を本書では**集中せん断力**と呼ぶ．

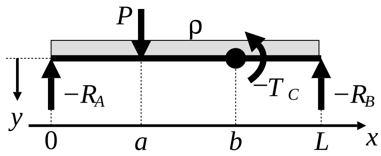
課題 31 (トルク荷重の数式表現)　次のトルク荷重を**集中せん断力** $G(x)$ として数式表現せよ．デルタ関数を用いよ．



8.2　荷重の完全な数式表現

以上の議論を総合すると，一般の荷重が完全に数式表現できる．すなわち，いかなる荷重も，**荷重分布関数** $w(x)$ と**集中せん断力** $G(x)$ のペアで書ける．具体的には，**算法 1** (p.35) を大前提として，**算法 2** (p.37) と**算法 5** (p.58) を適用すればよい．

課題 32 (荷重の完全な数式表現)　次の荷重を，**荷重分布関数** $w(x)$ と**集中せん断力** $G(x)$ のペアで完全に数式表現せよ．適宜デルタ関数を用いよ．



以上，任意の荷重が完全に数式表現できた．

8.3　手本

Answer. **課題 31 (p.59) (トルク荷重の数式表現)**

算法 5 (p.58) に従えば，

$$G(x) = -5\delta(x-1) + 2.5\delta(x-3) - 7\delta(x-5.5)$$

である．ちなみに，並進性の外力は存在しないので荷重分布関数は $w(x) = 0$(定数) である．　**END**

Answer. **課題 32 (p.60) (荷重の完全な数式表現)**

算法 2 (p.37) に従い，まず並進性の外力について

$$w(x) = \rho - R_A\delta(x) + P\delta(x-a) - R_B\delta(x-L)$$

である．さらに，**算法 5** (p.58) に従い，トルク荷重について

$$G(x) = -T_C\delta(x-b)$$

を得る．以上，問題の荷重は

$$\begin{cases} w(x) = \rho - R_A\delta(x) + P\delta(x-a) - R_B\delta(x-L) & \text{(荷重分布関数)} \\ G(x) = -T_C\delta(x-b) & \text{(集中せん断力)} \end{cases}$$

によって，もれなく数式表現される．　**END**

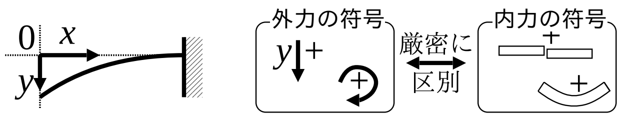
9

はりの算術 — 完結編

いよいよ完結編に突入する．前章までに必要な算法は全て出そろった．あとは運用力を集大成するのみである．4 つの基本例題を諸君の身体に転写してほしい．何も見ないで解ければ目標達成．これはスポーツである．健闘を祈る．

9.1 計算手順書

これまで通り**定義** 1 (p.8)〜3 に従い，次のように座標と符号を取る．



算法 6 (計算手順書): 集大成を以下に示す．

- **外力の計算**　はりを**剛体**と見なし，はりに作用する荷重を調べる．

  (A0) 座標を設定し，外力と内力の符号を確認する．反力をかき加える．

  (A1) 2 本のつり合い式の抽出．

  – 力のつり合い式と，トルクのつり合い式を抽出する．

  – 静定なら未知数を求め，不静定なら未知数を持ち越す．

  (A2) 荷重を数式表現．

  – 集中荷重と分布荷重を**荷重分布関数** $w(x)$ として数式表現する．

  – トルク荷重を**集中せん断力** $G(x)$ として数式表現する．

- **内力の計算**　はりを**弾性体**と見なし，以下の積分計算を実行する．

  (B1) **せん断力** $F(x) = \int_0^x -w(x)dx + G(x)$　($G(x)$ は集中せん断力)

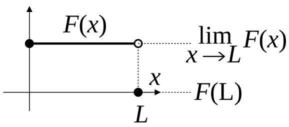
  (B2) **曲げモーメント** $M(x) = \int_0^x F(x)dx$

  (B3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{M(x)}{EI}$ を解く．

  (B4) 未知数の数だけ境界条件を拾い，未知数を定める．

- **終端の物理的解釈**　長さ L のはりについて，積分計算の定義域は $0 \le x \le L$ だが，物理的には終端 $x = L$ を除く $0 \le x < L$ の結果を利用する．便宜上，$x = L$ より僅かに小さな値を $x = L - 0$ と略記する．　□

Note (補足 — 終点の物理的解釈 —):　本書の方法では，例えば，せん断力 $F(x)$ が次のような関数として求まる場合がある．

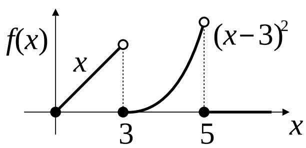


このようなとき，終端 $x = L$ において物理的に発生しているせん断力は，$\lim_{x\to L} F(x)$ の方である．したがって，実際に機械を設計するようなときは，終端の値として $\lim_{x\to L} F(x)$ を用いる．その一方で，終端における数学的な関数値 $F(L) = 0$ は力のつり合い式を意味している（次節で述べる）．

以上の計算手順書に沿って計算すると，たわみ曲線 $y(x)$ が求まるわけだが，その途上で，区分関数の累積積分を計算する場面が出てくる．いま現在の自分にできるかどうか，次の課題で確認しておこう．

課題 33 (区分関数の累積積分)　次の区分関数

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \equiv x & (0 \le x < 3) \\ f_2(x) \equiv (x-3)^2 & (3 \le x < 5) \\ f_3(x) \equiv 0 & (5 \le x) \end{cases}$$



について 0 から x までの累積積分 $\int_0^x f(x)$ を計算せよ．

9.2　終端の積分値 0 を利用した検算法

これから述べる内容は，計算に慣れるまではピンと来ないと思うので，まず次節の基本例題をこなしてから，必要に応じて読みかえしてほしい．

例えば，6.4 節 (p.44) で議論した，長さ L の両端支持はりの荷重分布関数は

$$w(x) = -\frac{P}{2}\delta(x) + P\delta(x - L/2) - \frac{P}{2}\delta(x - L)$$

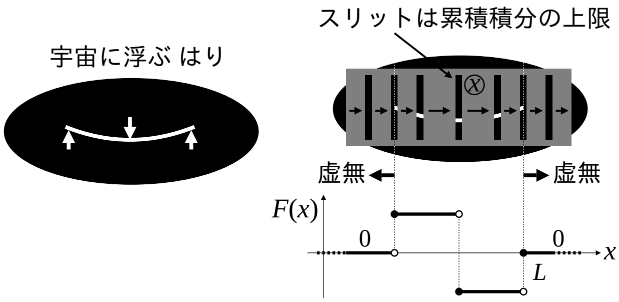
であったが，算法 6 (p.61) の (B1) および $G(x) = 0$ よりせん断力は

$$F(x) = \int_0^x -w(x)dx = \int_0^x \left(\frac{P}{2}\delta(x) - P\delta(x - L/2) + \frac{P}{2}\delta(x - L)\right)dx$$

である．ということは，はりの長さ一杯まで積分すると

$$\int_0^L \left(\frac{P}{2}\delta(x) - P\delta(x - L/2) + \frac{P}{2}\delta(x - L)\right)dx = \frac{P}{2} - P + \frac{P}{2} = \underline{0}$$

となる．せっかく $x = L$ の直前まで $F(x)$ の値が出ていたのに，最後に $F(L) = 0$ になってしまっては水の泡ではないか，と感じる諸君は下図を見てほしい．



図中のグレイの縦スリットは，積分 $\int_0^{x} -w(x)dx$ の上限 x を表す．まず，はりは静的につり合っているので，はりの存在領域 $0 \leq x \leq L$ の外は虚無の宇宙空間である．さもないと，行き先不明の力学作用が空間のどこかに残留していることになる．ここで，もし $\int_0^L -w(x)dx \neq 0$ なら，上限 x がはりの存在範囲を超えても $(L < x)$，空間は虚無に戻らない．静的なつり合い条件にあるはりは，あくまで自らの存在範囲のなかで力学作用をひき起し，終らせる．ゆえに $\int_0^L -w(x)dx = 0$ でなければならない．

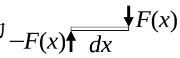
色々くどくど述べたが，結論をいうと，手順 (B1) の途上で現れる

- $\int_0^L -w(x)dx = 0$ は，**力のつり合い式**

なのである．ゆえに 0 になる．左辺は，はりに作用する並進性荷重 $-w(x)$ の総和であり，それが 0 なのだから「力のつり合い式」に他ならない．力のつり合い式では，集中せん断力 $G(x)$ は無視できる．なぜなら，前章で議論したように，$G(x)$ は無限小幅の偶力から形成されており，偶力とは対向する同じ大きさの力のペアだから，偶力の並進力は無限小のスペースで相殺され，外界に影響を与えないからである[1]．

全く同様にして，

- $M(L) = \int_0^L F(x)dx = 0$ は，**トルクのつり合い式**

である．なぜなら，積分の $F(x)dx$ は，せん断力がひき起す偶力 

である[2]．その総和が 0 だといっているのだから $M(l) = 0$ は「トルクのつり合い式」に他ならない．

以上の考察から，手順 (B1) において $\int_0^L -w(x)dx = 0$ にならなければ，そして手順 (B2) において $\int_0^L F(x)dx = 0$ にならなければ，何らかの計算間違いである．あるいは発想を逆にして，手順 (A1) の代りに，(B1) の段階で力のつり合い式を，(B2) の段階でトルクのつり合い式を，積分計算で算出することもできる．

9.3　4 つの基本例題

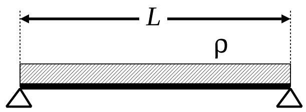
4 つの基本例題で必要な全ての算術が体験できる．設問だけを白紙に移し，何も見ないで答が合えば本書の第 I 部は卒業である．

---

[1] ゆえに回転作用のみ発生する．

[2] 力 × 微小動径 dx．詳細は 12.3 節 (p.95) 参照．

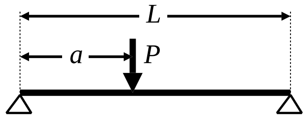
例題 1 (分布荷重 — 最低レベルの問題): 次のはりのたわみ曲線 $y(x)$ を求めよ.



両端は自由端支持，ρ は等分布荷重とする. □

課題 34　(1) 設問を紙に写せ. (2) 何も見ないで全ての計算を実行せよ.

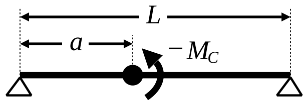
例題 2 (集中荷重 — はりをつなげる問題): 次のはりのたわみ曲線 $y(x)$ を求めよ.



両端は自由端支持とする. □

課題 35　(1) 設問だけ白紙に写せ. (2) 何も見ないで全ての計算を実行せよ.

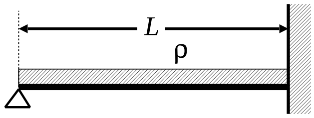
例題 3 (トルク荷重 — $G(x) \neq 0$ の問題): 次のはりのたわみ曲線 $y(x)$ を求めよ.



両端は自由端とする. □

課題 36　(1) 設問だけ白紙に写せ. (2) 何も見ないで全ての計算を実行せよ.

例題 4 (不静定 — 未知数を持ち越す問題): 次のはりのたわみ曲線 $y(x)$ を求めよ.



壁際の右端は固定端支持，左端は自由端支持とする. □

課題 37　(1) 設問だけ白紙に写せ. (2) 何も見ないで全ての計算を実行せよ.
※ 方程式を見つける感覚を体得せよ！

課題 38　標準的な材料力学の教科書や演習書にある計算問題を 5 問程度選び，本書の方法で実際に解いてみて，計算結果が一致することを確かめよ.

9.4 手本

Answer. 課題 33 (p.62) (区分関数の累積積分)

課題 15 (p.35) の手本 (p.38) でも簡単に触れたが，区分関数を積分するときの基本方針は,

- 関数形が切り換わる境界で，積分区間を分ける.

である．本問では $x = 3$ と $x = 5$ の 2ヶ所で関数形が変化するから，積分区間を 3 つに分けて

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^3 f_1(x)dx + \int_3^5 f_2(x)dx + \int_5^x f_3(x)dx$$

とすればよいのだが，これではまだ考察不足である．なぜなら本問の積分は累積積分で，積分区間の上限 x は変数なので，上式は $5 < x$ のときの式である．なぜなら $x < 5$ ではまだ $f_3(x)$ は登場しない．ゆえに区間に応じて，登場しない関数形を排除した

$$\int_0^x f(x)dx = \begin{cases} \int_0^x f_1(x)dx & (0 \le x < 3) \\ \int_0^3 f_1(x)dx + \int_3^x f_2(x)dx & (3 \le x < 5) \\ \int_0^3 f_1(x)dx + \int_3^5 f_2(x)dx + \int_5^x f_3(x)dx & (5 \le x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^x xdx = \frac{x^2}{2} & (0 \le x < 3) \\ \int_0^3 xdx + \int_3^x (x-3)^2 dx = \frac{9}{2} + \frac{(x-3)^3}{3} & (3 \le x < 5) \\ \int_0^3 xdx + \int_3^5 (x-3)^2 dx + \int_5^x 0dx = \frac{9}{2} + \frac{8}{3} + 0 & (5 \le x) \end{cases}$$

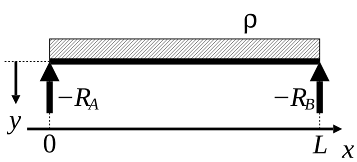
が正解である．$(3 \le x < 5)$ の $9/2 + \cdots$ や，$(5 \le x)$ の $9/2 + 8/3 + \cdots$ を忘れる解答が多いので注意．これらを忘れると 0 から累積したことにならない.

以上，区分関数の累積積分は，やはり区分関数になる. **END**

Answer. 例題 1 (p.64) (分布荷重 — 最低レベルの問題)

(a) ● 外力の計算

(A0) 定義 1 (p.8)〜3 に従い座標と符号を取り，反力をかき加える.



反力は，はり両端の $-R_A$ と $-R_B$ である.

(A1)　分布荷重 ρ があるので，**算法 4 (p.53)** を用いて総荷重と重心を求めておくと

$$\text{総荷重} = \rho L, \quad \text{重心} = L/2$$

ゆえに，**力のつり合い式**は

$$\rho L - R_A - R_B = 0 \tag{9.1}$$

左端を基準点にとると，**トルクのつり合い式**は

$$\rho L \frac{L}{2} - R_B L = 0$$

2 つの未知数 R_A, R_B に対して 2 本の方程式が存在するので解ける．つまり本問は**静定問題**である．未知数を解くと

$$R_A = \frac{\rho L}{2}, \quad R_B = \frac{\rho L}{2}$$

となり，全ての荷重が判明した．

(A2)　**荷重分布関数**は次式となる．

$$w(x) = \rho - \frac{\rho L}{2}\delta(x) - \frac{\rho L}{2}\delta(x-L)$$

本問にトルク荷重は存在しないので，**集中せん断力**は

$$G(x) = 0$$

となり，荷重の数式表現が完了した．

(b)　**○ 内力の計算**

(B1)　**せん断力**は

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x -w(x)dx + G(x) \\ &= \underbrace{-\int_0^x \rho dx}_{A} + \underbrace{\frac{\rho L}{2}\int_0^x \delta(x)dx}_{B} + \underbrace{\frac{\rho L}{2}\int_0^x \delta(x-L)dx}_{C} \end{aligned}$$

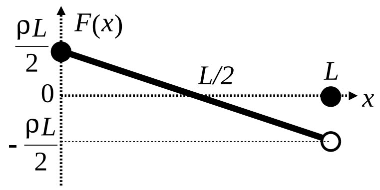
項別に積分を実行すると下表を得る．

x	0	$\cdots$	L
A	$-\rho x$	$-\rho x$	$-\rho x$
B	$\rho L/2$	$\rho L/2$	$\rho L/2$
C	0	0	$\rho L/2$

これを式で書くと

$$F(x) = \begin{cases} \rho\left(\frac{L}{2} - x\right) & (0 \leq x < L) \\ 0 & (x = L) \end{cases} \tag{9.2}$$

となり，そのグラフは (SFD: せん断力図) は次のようになる．

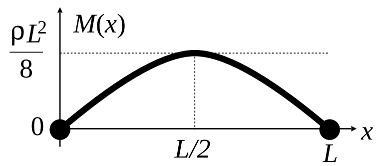


Note (終端の物理的解釈): 積分値 $F(L)=0$ は力のつり合い式なので，物理的には (設計等では) $F(L-0)=\rho\left(\frac{L}{2}-x\right)$ を右端のせん断力とする．

(B2) 曲げモーメントは，$F(x)$ を積分して

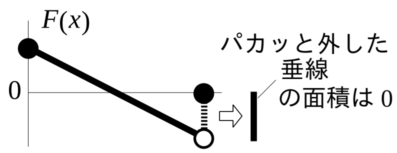
$$M(x)=\int_0^x F(x)dx=\frac{\rho(Lx-x^2)}{2} \qquad (0\le x\le L)$$

となり，そのグラフ (BMD: 曲げモーメント図) を描くと次のようになる．



Note (有限高さの不連続点の積分):

あまり本質的な問題ではないので，直観的に処理するが，$F(x)$ の終点 $x=L$ には高さ $PL/2$ の不連続点がある．この不連続点を無視して積分しても，幅 $0\times$ 高さ $PL/2$ $=$ 面積 0 の垂線



を無視するだけだから，総和としての $M(L)$ の値は変わらない (広義積分の定理風にいうと，有限高さの不連続点を有限個無視しても積分値は変わらない)．(これがデルタ関数なら無限高さなので無視できない)

(B3) 求めた $M(x)$ をたわみ曲線の微分方程式 (3.1) に代入する．

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x)=-\frac{M(x)}{EI}=-\frac{\rho}{2\,EI}\left(Lx-x^2\right)=\frac{\rho}{2\,EI}\left(x^2-Lx\right)$$

これを 1 回積分して，はりの傾きは

$$\frac{dy}{dx}(x)=\frac{\rho}{2\,EI}\left(\int(x^2-Lx)dx+C\right)=\frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{Lx^2}{2}+C\right)$$

もう 1 回積分して，たわみ曲線は

$$y(x) = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\int\left(\frac{x^3}{3} - \frac{Lx^2}{2} + C\right)dx + D\right)$$
$$= \frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{6} + Cx + D\right)$$

となる．

(B4)　**未知数**は C と D の 2 つだから，2 つの境界条件を見付ける．はりの両端 $x = 0, L$ は支点だから，変位 0 より

$$y(0) = 0 \implies D = 0$$
$$y(L) = 0 \implies \frac{L^4}{12} - \frac{LL^3}{6} + CL + 0 = 0 \implies C = \frac{L^3}{12}$$

となる．したがって次の結果を得る．

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{Lx^2}{2} + \frac{L^3}{12}\right)$$
$$y(x) = \frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{6} + \frac{L^3x}{12}\right)$$

はりの傾きを**たわみ角** $i(x)$ として角度表示するなら次式となる[3)]．

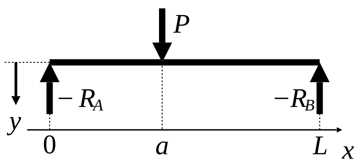
$$i(x) = \tan^{-1}\frac{\rho}{2\,EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{Lx^2}{2} + \frac{L^3}{12}\right)$$

END

Answer. 例題 2 (p.64) (集中荷重 — はりをつなげる問題)

(c)　● 外力の計算

(A0)　**定義** 1 (p.8)〜3 に従い座標と符号を取り，反力をかき加える．



反力は，はり両端の $-R_A$ と $-R_B$ である．

(A1)　ゆえに，**力のつり合い式**は

$$P - R_A - R_B = 0 \tag{9.3}$$

になり，右端を基準に**モーメントのつり合い式**をたてると

$$R_AL - P(L-a) = 0 \tag{9.4}$$

2 つの未知数 R_A, R_B に対して 2 本の方程式が存在するので解ける．つまり本問は**静定問題**である．未知数を解くと

3) p.27 の (4.1) を参照．

$$R_A = \frac{P(L-a)}{L}, \quad R_B = \frac{Pa}{L}$$

となり反力が判明する．

(A2) **荷重分布関数** は次式となる．

$$w(x) = -\frac{P(L-a)}{L}\delta(x) + P\delta(x-a) - \frac{Pa}{L}\delta(x-L)$$

本問にトルク荷重は存在しないので，**集中せん断力**は

$$G(x) = 0$$

(d) **○ 内力の計算**

(B1) **せん断力は**

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x -w(x)dx + G(x) \\ &= \underbrace{\frac{P(L-a)}{L}\int_0^x \delta(x)dx}_{A} \underbrace{-P\int_0^x \delta(x-a)dx}_{B} + \underbrace{\frac{Pa}{L}\int_0^x \delta(x-L)dx}_{C} \end{aligned}$$

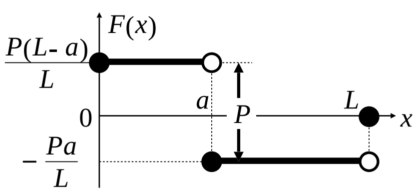
項別に A,B,C について積分を実行すると下表を得る．

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	L
A	$\frac{P(L-a)}{L}$	$\frac{P(L-a)}{L}$	$\frac{P(L-a)}{L}$	$\frac{P(L-a)}{L}$	$\frac{P(L-a)}{L}$
B	0	0	$-P$	$-P$	$-P$
C	0	0	0	0	$\frac{Pa}{L}$
計	$\frac{P(L-a)}{L}$	$\frac{P(L-a)}{L}$	$-\frac{Pa}{L}$	$-\frac{Pa}{L}$	0

これを式で書くと

$$F(x) = \begin{cases} \frac{P(L-a)}{L} & (0 \le x < a) \\ -\frac{Pa}{L} & (a \le x < L) \\ 0 & (x = L) \end{cases}$$

となり，そのグラフ (SFD: せん断力図) は次のようになる．



Note (終端の物理的解釈): 積分値 $F(L) = 0$ は力のつり合い式なので，物理的には (設計等では) $F(L-0) = -\frac{Pa}{L}$ を右端のせん断力とする．

(B2)　曲げモーメントは，$F(x)$ を積分して (前問同様 $x = L$ にある有限高さの不連続点は無視する)

$$
\begin{aligned}
M(x) &= \int_0^x F(x)dx \\
&= \begin{cases} \int_0^x \frac{P(L-a)}{L}dx & (0 \leq x < a) \\ \int_0^a \frac{P(L-a)}{L}dx + \int_a^x -\frac{Pa}{L}dx & (a \leq x \leq L) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{P(L-a)}{L}x & (0 \leq x < a) \\ -\dfrac{Pa}{L}(x-L) & (a \leq x \leq L) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Note (区分関数の累積積分):　くどいが，あくまで累積を積分する．**課題 33 (p.62)** で確認した通り，区分関数

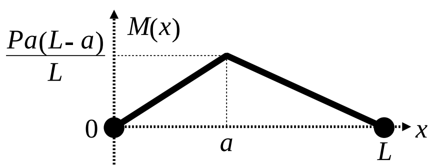
$$
F(x) = \begin{cases} p(x) & (0 \leq x < a) \\ q(x) & (a \leq x \leq L) \end{cases}
$$

の 0 から x までの累積積分は

$$
\underbrace{\int_0^x F(x)dx}_{0\sim x\ \text{の累積}} = \begin{cases} \underbrace{\int_0^x p(x)dx}_{0\sim x\text{の累積}} & (0 \leq x < a) \\ \underbrace{\int_0^a p(x)dx}_{0\sim a\ \text{の累積}} + \underbrace{\int_a^x q(x)dx}_{\text{と，}a\sim x\ \text{の累積}} & (a \leq x \leq L) \end{cases}
$$

である．下段における $0\sim a$ の累積を忘れる答案が多いので注意.

$M(x)$ のグラフ (BMD: 曲げモーメント図) を描くと次のようになる.



(B3)　$M(x)$ が 2 領域の区分関数なので，はりを 2 領域に区分して計算する.

$$
y(x) = \begin{cases} y_1(x) & (0 \leq x < a) \\ y_2(x) & (a \leq x \leq L) \end{cases}
$$

区間別に $M(x)$ を**たわみ曲線の微分方程式** (3.1) に代入し計算を進めるが，積分定数の消去を意識して若干工夫してやってみる.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y_1}{dx^2}(x) &= -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{P(L-a)}{L\,EI}x = \frac{P(a-L)}{L\,EI}x \\
\frac{dy_1}{dx}(x) &= \frac{P(a-L)}{L\,EI}\left(\int xdx + C_1\right) = \frac{P(a-L)}{L\,EI}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) \\
y_1(x) &= \frac{P(a-L)}{L\,EI}\left(\frac{x^3}{6} + C_1x + D_1\right) \\
\frac{d^2y_2}{dx^2}(x) &= -\frac{M(x)}{EI} = \frac{Pa}{L\,EI}(x-L) \\
\frac{dy_2}{dx}(x) &= \frac{Pa}{L\,EI}\left(\int (x-L)dx + C_2\right) = \frac{Pa}{L\,EI}\left(\frac{x^2}{2} - Lx + C_2\right) \\
y_2(x) &= \frac{Pa}{L\,EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} + C_2(x-L) + D_2\right)
\end{aligned}
$$

以上，全ての積分が終了した．

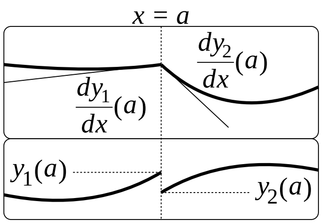
(B4)　**未知数**は C_1, C_2, D_1, D_2 の 4 つだから，4 つの境界条件を見付ける．まず，はりの両端 $x = 0, L$ は支点だから，変位 0 より

$$
y_1(0) = 0, \quad y_2(L) = 0 \tag{9.5}
$$

となり 2 つ確保できる．あと 2 つ追加するために，次のような物理的考察を行う．すなわち，境界はあくまで計算上のもので，はり自身は一体だから，

- 区間の境界で，はりに**段差**はない．
- 区間の境界で，はりに**折れ**はない．

という仮定が追加できる．以上を数式表現すると，



のような状況を避けるために，

$$
\frac{dy_1}{dx}(a) = \frac{dy_2}{dx}(a), \quad y_1(a) = y_2(a) \tag{9.6}
$$

が要請されるため，新たに 2 つ境界条件が追加できる．まず (9.5) より

$$
\begin{aligned}
y_1(0) = 0 &\implies D_1 = 0 \\
y_2(L) = 0 &\implies \frac{L^3}{6} - \frac{LL^2}{2} + D_2 = 0 \implies D_2 = \frac{L^3}{3}
\end{aligned}
$$

(9.6) より (D_1, D_2 を早速用いて)

$$
\begin{aligned}
\frac{P(a-L)}{L\,EI}\left(\frac{a^3}{6} + C_1a\right) &= \frac{Pa}{L\,EI}\left(\frac{a^3}{6} - \frac{La^2}{2} + C_2(a-L) + \frac{L^3}{3}\right) \\
\frac{P(a-L)}{L\,EI}\left(\frac{a^2}{2} + C_1\right) &= \frac{Pa}{L\,EI}\left(\frac{a^2}{2} - La + C_2\right)
\end{aligned}
$$

これを用いて未知数 C_1, C_2 を解くと

$$C_1 = \frac{a^2 - 2aL}{6}, \quad C_2 = \frac{a^2 + 2L^2}{6}$$

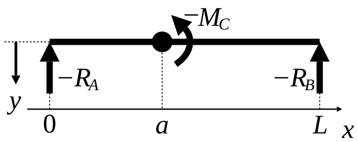
となり，全ての未知数が決定した．具体的な代入は省略する．　**END**

> **Note (つなげる問題？):**　このように，集中荷重や (次問の) モーメント荷重など，1 点に**集中**する荷重があると，区間ごとの式が出てきて未知数が増える．こんなときは隣り合う区間が,「折れずに・段差なく」継がる条件で未知数を定める．折れずに＝傾きが等しい，段差なく＝変位が等しい，である．

Answer. 例題 3 (p.64) (モーメント荷重 — $G(x) \neq 0$ の問題)

(e)　● 外力の計算

(A0)　**定義** 1 (p.8)〜3 に従い座標と符号を取り，反力をかき加える．

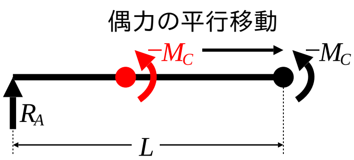


反力は，はり両端の $-R_A$ と $-R_B$ である．

(A1)　反力 $-R_A, -R_B$ 以外の並進力はないので，**力のつり合い式は,**

$$R_A + R_B = 0 \tag{9.7}$$

また右端を基準に**トルクのつり合い式**をたてると，**7 章** (p.49) の議論より，いま行っているつり合い式の導出段階に限り，トルク M_C を右端まで平行移動して

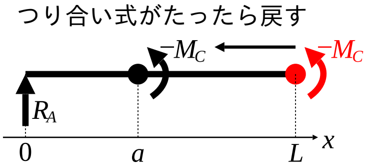


$$-M_C + R_A L = 0 \tag{9.8}$$

以上，2 つの未知数 R_A, R_B に対して 2 本の方程式が存在するので解ける．ゆえに本問は**静定問題**である．解けば反力が判明する．

$$R_A = \frac{M_C}{L}, \quad R_B = -\frac{M_C}{L}$$

※ 平行移動したトルク $-M_C$ を本来の位置に戻す．



(A2) 荷重分布関数 は

$$w(x) = -\frac{M_C}{L}\delta(x) + \frac{M_C}{L}\delta(x-L)$$

集中せん断力は，位置 $x = a$ に大きさ $-M_c$ のトルク荷重が存在するので

$$G(x) = -M_c\delta(x-a)$$

以上，荷重の数式表現が完了した．

(f) ○ 内力の計算

(B1) せん断力は

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x -w(x)dx + G(x) \\ &= \underbrace{+\frac{M_C}{L}\int_0^x \delta(x)dx}_{A} \underbrace{-\frac{M_C}{L}\int_0^x \delta(x-L)dx}_{B} \underbrace{-M_C\delta(x-a)}_{C} \end{aligned}$$

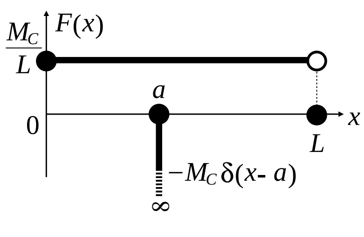
まず A,B がデルタ関数の累積積分，C が単独の関数であることに注意すると

x	0	$\cdots$	L
A	M_C/L	M_C/L	M_C/L
B	0	0	$-M_C/L$
小計	M_C/L	M_C/L	0 (検算 OK)
C	$-M_C\delta(x-a)$	$-M_C\delta(x-a)$	$-M_C\delta(x-a)$
計	$M_C/L - M_C\delta(x-a)$	$M_C/L - M_C\delta(x-a)$	$-M_C\delta(x-a)$

を得る．これを数式表現すると

$$F(x) = \begin{cases} \frac{M_C}{L} - M_C\delta(x-a) = \frac{M_C}{L} & (0 \le x < a) \\ \frac{M_C}{L} - M_C\delta(x-a) = -M_C\delta(x-a) & (a \le x < L) \\ -M_C\delta(x-a) = 0 \quad \because x \ne a & (x = L) \end{cases}$$

ただし，デルタ関数の性質: $\delta(x-a) = 0$ if $x \ne a$ を用いて整理した．以上に得られた $F(x)$ のグラフ (SFD: せん断力図) を描くと次のようになる[4]．



Note (終端の物理的解釈): 積分値 $F(L) = 0$ は力のつり合い式なので，物理的には (設計等では) $F(L-0) = \frac{M_C}{L}$ を右端のせん断力とする．

[4] 市販の教科書では $-M_C\delta(x-a)$ の項を省略してる？

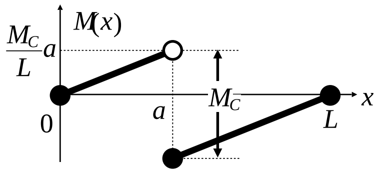
(B2)　曲げモーメントは，公式 (B2) により，次の積分を実行すれば求まる．

$$
\begin{aligned}
M(x) &= \int_0^x F(x)dx \\
&= \begin{cases} \int_0^x \frac{M_C}{L} dx & (0 \le x < a) \\ \int_0^a \frac{M_C}{L} dx + \int_a^x \left(\frac{M_C}{L} - M_C\delta(x-a)\right) dx & (a \le x \le L) \end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで，これまでと同様にデルタ関数を含む累積積分を実行すれば

$$
= \begin{cases} \dfrac{M_C}{L} x & (0 \le x < a) \\ \dfrac{M_C}{L} x - M_C = \dfrac{M_C}{L}(x-L) & (a \le x \le L) \end{cases}
$$

となる．得られた $M(x)$ のグラフ (BMD: 曲げモーメント図) を描くと



となる[5]．

(B3)　本問も $M(x)$ が区分関数なので，関数形が変化する $x = a$ を境界として，2 領域に分けて計算を進める．

$$
y(x) = \begin{cases} y_1(x) & (0 \le x < a) \\ y_2(x) & (a \le x \le L) \end{cases}
$$

とする．

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} &= -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{M_C}{L\,EI} x \\
\frac{dy_1(x)}{dx} &= -\frac{M_C}{L\,EI}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) \\
y_1(x) &= -\frac{M_C}{L\,EI}\left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + D_1\right) \\
\frac{d^2 y_2(x)}{dx^2} &= -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{M_C}{L\,EI}(x-L) \\
\frac{dy_2(x)}{dx} &= -\frac{M_C}{L\,EI}\left(\frac{x^2}{2} - Lx + C_2\right) \\
y_2(x) &= -\frac{M_C}{L\,EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} + C_2(x-L) + D_2\right)
\end{aligned}
$$

以上，全ての積分が終了した．

---

[5] 標準的な教科書では $-M_C\delta(x-a)$ を省略して $F(x)$ のグラフを描くようである．$-M_C\delta(x-a)$ が無いと，いくら計算しても $M(x)$ の段差は出てこないと思うのだが …

(B4) **未知数**は C_1, C_2, D_1, D_2 の 4 つなので，4 つの境界条件を抽出する．まず，両端 $x = 0, L$ は支点だから常に変位 0 より

$$y_1(0) = 0 \implies \frac{0^3}{6} + C_1 0 + D_1 = 0 \implies D_1 = 0 \tag{9.9}$$

$$y_2(L) = 0 \implies \frac{L^3}{6} - \frac{LL^2}{2} + C_2(L - L) + D_2 = 0 \implies D_2 = \frac{L^3}{3} \tag{9.10}$$

次に，前問同様，y_1 と y_2 の境界 $x = a$ で，はりに**折れ**と**段差**とが生じないために

$$\frac{dy_1(a)}{dx} = \frac{dy_2(a)}{dx}, \quad y_1(a) = y_2(a) \tag{9.11}$$

を要請する．これで境界条件が 4 つになったので解ける．(9.11) に具体形を代入すると (D_1, D_2 を早速用いて)

$$\frac{a^2}{2} + C_1 = \frac{a^2}{2} - La + C_2$$
$$\frac{a^3}{6} + C_1 a = \frac{a^3}{6} - \frac{La^2}{2} + C_2(a - L) + \frac{L^3}{3}$$

これを用いて未知数 C_1, C_2 を解くと

$$C_1 = \frac{3a^2 - 6aL + 2L^2}{6}, \quad C_2 = \frac{3a^2 + 2L^2}{6}$$

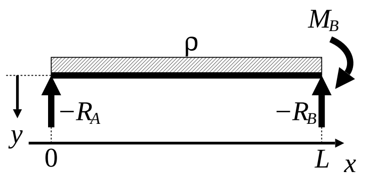
が得られる．これで全ての未知数が決定し，問題が解けた．具体的な代入は省略する．

END

Answer. 例題 4 (p.64) (不静定 — 未知数を持ち越す問題)

(g) ○ 外力の計算

(A0) **定義** 1 (p.8)〜3 に従い座標と符号を取り，反力をかき加える．



反力は，はり両端の $-R_A$ と $-R_B$，および壁からの反トルク M_B である．

(A1) 分布荷重 ρ があるので，**算法** 4 (p.53) を用いて総荷重と重心を求めておくと

$$\text{総荷重} = \rho L, \quad \text{重心} = L/2$$

ゆえに，**力のつり合い式**は

$$\rho L - R_A - R_B = 0 \tag{9.12}$$

右端を基準点にとると，**トルクのつり合い式**は

$$-\rho L \frac{L}{2} + R_A L + M_B = 0 \tag{9.13}$$

3 つの未知数 R_A, R_B, M_B に対して現状では 2 本の方程式しか存在しないので解けない．つまり本問は**不静定問題**である．未知数は変形の計算まで持ち越す[6)]．

(A2)　**荷重分布関数**は次式となる．

$$w(x) = \rho - R_A\delta(x) - R_B\delta(x-L)$$

右端 $x = L$ にトルク荷重 M_B が存在するので，**集中せん断力**は

$$G(x) = M_B\delta(x-L)$$

以上，荷重の数式表現が完了した．

(h)　○ 内力の計算

(B1)　せん断力は

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x -w(x)dx + G(x) \\ &= \underbrace{-\int_0^x \rho dx}_{A} \underbrace{+R_A\int_0^x \delta(x)dx}_{B} \underbrace{+R_B\int_0^x \delta(x-L)dx}_{C} \underbrace{+M_B\delta(x-L)}_{D} \end{aligned}$$

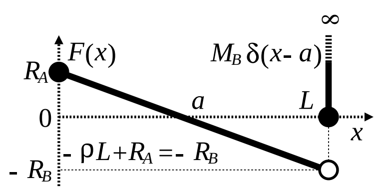
手始めに A,B,C について積分を実行すると下表を得る．

x	0	$\cdots$	L
A	$-\rho x$	$-\rho x$	$-\rho x$
B	R_A	R_A	R_A
C	0	0	R_B
小計	$-\rho x + R_A$	$-\rho x + R_A$	0　(検算 OK)

D 項まで含めて式で書くと

$$F(x) = \begin{cases} -\rho x + R_A & (0 \le x < L) \\ -\rho x + R_A + M_B\delta(x-L) & (x = L) \end{cases}$$

得られた $F(x)$ のグラフ (SFD: せん断力図) を描くと下図になる．



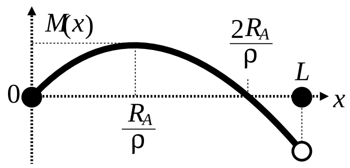
Note (終端の物理的解釈):　積分値 $F(L) = 0$ は力のつり合い式なので，物理的には (設計等では) $F(L-0) = \rho L + R_A$ を右端のせん断力とする．

[6)] かえって計算が楽になる？

(B2) 曲げモーメントは，積分を実行して

$$M(x) = \begin{cases} -\rho\frac{x^2}{2} + R_A x & (0 \le x < L) \\ -\rho\frac{L^2}{2} + R_A L + M_B = 0 & (x = L) \end{cases}$$

$M(L)$ はトルクのつり合い式 (9.13) より 0 になる．ゆえに，$M(x)$ グラフ (BMD: 曲げモーメント図) が次のように得られる．(R_B の処理については **Note (有限高さの不連続点の積分)** p.67 に従う)



Note (終端の物理的解釈): 積分値 $M(L) = 0$ はトルクつり合い式なので，物理的には (設計等では) $M(L-0) = -\rho\frac{L^2}{2} + R_A L$ を右端のせん断力とする．以下，計算上も $M(L) = -\rho\frac{L^2}{2} + R_A L$ と見なす．

(i) ○ 内力の計算

(B3) はりの傾きとたわみ曲線は，

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^2}{2} - R_A x\right)$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^3}{6} - R_A\frac{x^2}{2} + C\right)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^4}{24} - R_A\frac{x^3}{6} + Cx + D\right)$$

(B4) 未知数は R_A, R_B, M_B, C, D の計 5 つなので，5 つの境界条件を抽出する．力のつり合い式とトルクのつり合い式で 2 本確保されてるので，残り 3 本である．

まず，両端 $x = 0, L$ は支点と壁だから**たわみ 0**，また**壁で傾き 0** より

$$y(0) = 0 \implies \frac{\rho 0^4}{24} - R_A\frac{0^3}{6} + C0 + D = 0 \qquad \implies D = 0$$

$$y(L) = 0 \implies \frac{\rho L^4}{24} - R_A\frac{L^3}{6} + CL + \underbrace{D}_{0} = 0$$

$$\frac{dy(L)}{dx} = 0 \implies \frac{\rho L^3}{6} - R_A\frac{L^2}{2} + C = 0$$

これで 3 本確保できた．解く前に $D = 0$ が分ってラッキー．上の第 2, 第 3 式を 2 連立で解くと

$$R_A = \frac{3\rho L}{8},\ C = \frac{\rho L^3}{48}$$

となり 2 つ消える．(9.12)，(9.13) より

$$R_B = \rho L - R_A = \rho L - \frac{3\rho L}{8} = \frac{5\rho L}{8}$$

$$M_B = \frac{\rho L^2}{2} - R_A L = \frac{\rho L^2}{2} - \frac{3\rho L^2}{8} = \frac{\rho L^2}{8}$$

となる．全ての未知数が判明し，ゆえに問題が解けた．具体的に代入すると

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^3}{6} - \frac{3\rho L x^2}{16} + \frac{\rho L^3}{48}\right) = \frac{8\rho x^3 - 9\rho L x^2 + \rho L^3}{48EI}$$

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\rho x^4}{24} - \frac{3\rho L x^3}{48} + \frac{\rho L^3 x}{48}\right) = \frac{(2\rho x^4 - 3\rho L x^3 + \rho L^3 x)}{48EI}$$

たわみ角 は $\tan^{-1}\frac{dy}{dx}$ である．　**END**

第 II 部

番外編 — dx と dy の使い方

この番外編では，9 章まで天下りに与えていた算法 6 (p.61) の原理を解明する．これを自力で行うには dx とか dy などと書かれる無限小量を駆使する必要があるが，そのための能力を 10,11 章で即席かつ本格的に養成してから，12 章において，本題である「なぜ荷重を 4 回積分するのか？」を片付ける．

10

曲線の曲率

教科書の冒頭で，何の前ぶれもなく dx とか dy を持ち出され，dy/dx の分母と分子をバラしていいの？ — なんて強烈な違和感を憶えつつも，その根拠を教えてくれる本も教師も見付からず，結局丸暗記した経験はないだろうか．せっかくだから，この第 II 部で片付けてしまおう．まずは初等的にいく．

10.1 微分？

諸君が知っている微分は，実は本当の微分ではない[1)]．正式には dx のように d を冠した変数のことを「x の**微分**」と呼ぶ [5]．その正体は「小さくない」と文句を言われたら「(相手が納得するまで) どんどん小さくなれる変数」のことである．より物理的に**無限小**とも呼ぶ．まずは初心者へアドバイス．

- 微分 dx を普通の変数と考えよ！

である．普通との違いは実用的には次の 2 つである[2)]．

(d1) 曲りを無視した世界の変数である[3)]．
(d2) 微分と微分の比は，微分係数に等しい．

すなわち無限小の世界では曲線を直線と見なし[4)]，計算の途中で**比**が出てきたら微分係数と見なす．例えば**比** dy/dx が出てきて $y = x^2$ なら $dy/dx = 2x$ を代入してよい[5)]．目を慣らしておくと，次の 2 つは同じ等式である．

$$\underbrace{\frac{df}{dx} = a}_{\text{等式 1}} \iff \underbrace{df = a\,dx}_{\text{等式 2}}$$

[1)] 馴染みの df/dx は正式には**微分係数**または**微分商**と呼ばれる比である．これらを関数として見るときは導関数と呼んだ．

[2)] 他にもあるが，とりあえず．

[3)] 無限に小さい変数という説明が教科書的だが，で？ と著者は思う．ようは「曲りを無視」である．

[4)] 引戸を地球の曲率に合せて作らないのと同発想．

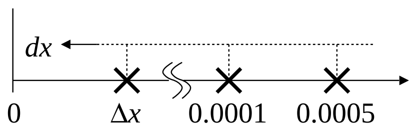
[5)] その他，$(dx)^2 = 0$, $dxdy = -dydx$ などの性質もあるが，あとで述べる．

その上で等式 1 については，例えば $f = x^3$ なら高校流に $df/dx = f' = 3x^2$ となるわけだ．等式 2 が見慣れないかも知れないが，こう書いてよい．というよりむしろ，$df = adx$ と書いたときの係数 a を微分係数と呼ぶのである．

Note (微小量と無限小): 多くの教科書では，微小な数を Δx などと表記する．このいわゆる微小量 Δx と，無限小 dx との違いは

- 微小量 Δx は小さいだけの単なる数値．
- 無限小 dx は「相手に合せてどんどん小さくなれる」知能を有する自動変数．

である．ようするに，Δx は数値だから具体的に $\Delta x = 0.001$ などと書けるが，dx は数値では書けない．なぜなら，もし $dx = 0.000001$ などと固定してしまったら「俺的には 0.000001 は小さくない」という人が現れたときに無限小でないことがバレてしまう．ようするに，どんな微小量 Δx を持ってきても勝手に $dx < \Delta x$ となってくれるようなオートマチックな変数 dx を**微分**または**無限小**と呼び，単なる微小量と区別するわけだ．

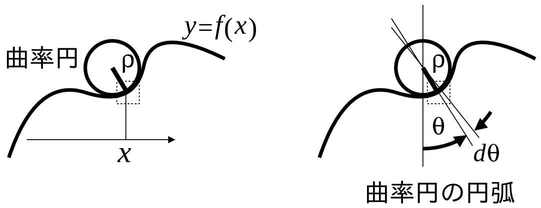


10.2 曲率 (3.3) の導出

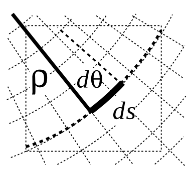
微分 dx の性質 (d1)「曲りを無視する」だけを使って，曲線の曲率 (3.3) を導出してみる．理工学の標準的論法である．

目標　曲線 $y = f(x)$ の位置 x での曲率を $f(x)$ の関数形から手計算する．

STEP 1　まず，曲率の定義から素朴に辿ってみよう．曲線 $y = f(x)$ に位置 x でピッタリ接する曲率円を考える (下図の左)．



ここで，ピッタリきている部分に着目する．この部分の寸法を，θ と s の微分 $d\theta$ と ds とでメモしておく (上図右，および下図)．すると，単なる弧度法より次式が成立する．



$$\rho d\theta = ds \tag{10.1}$$

普通の変数でも成立する関係式である．弧度法であるからグラフ用紙は極座標系である(細い点線)．これより曲率 $1/\rho$ は

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

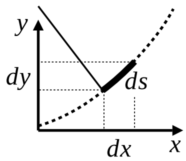
と測られる．とはいえ，上式には x も $y = f(x)$ も無いので，このままでは曲線 $y = f(x)$ と曲率 $1/\rho$ の関係は不明である．上式を x 方向と y 方向の無限小 dy, dx のみで書きたい．

STEP 2　$d\theta, dx, ds$ は普通の変数として扱えるから，上式は次のように変形できる．

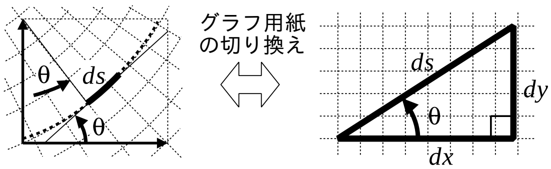
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{ds}$$

ここでようやく dx が出てきた．あとは ds と $d\theta$ を消せればよい．

STEP 3　そこでいったん，グラフ用紙を直交座標系に切り換え，次のような x 方向と y 方向の微分 dx, dy を考える．



これに基づき，3 本の直線で直角三角形を構成する (下図の右)．曲りを無視する無限小世界のなせる技である．



まず，三平方の定理より

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

であるが，ds, dx, dy を普通の変数と考えて

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

同じく普通の変数として逆数の平方根を取り

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

これで 1 個片付いた．なぜなら，右辺に含まれる dy/dx は $y = f(x)$ を微分すれば求まる．次に，図の三角形について tan の定義より次式が成立する．

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

同じことを逆関数 $\tan^{-1}$ で書くと

$$\theta = \tan^{-1}\frac{dy}{dx}$$

である．$\tan^{-1}$ の微分公式と，合成関数の微分公式を使うと

$$(\tan^{-1} g(x))' = g'(x)\frac{1}{1+g^2(x)}$$

なので，したがって

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

となり，全部片付いた．

曲率 (3.3)　以上から

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$$

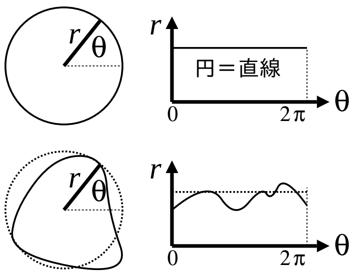
を得る．以上，曲線の曲率 (3.3) の導出が完了した．

無限小の論理で曲りを無視したら「曲線自体の曲り」まで無視されそうだが，そうならない理由を述べよう．曲率 (3.3) の導出過程をよく吟味すると，次の性質を用いていたことが分かる．

1) 直交座標系の無限小世界では，曲線は直線で近似される．
2) 極座標系の無限小世界では，曲線は円弧で近似される．

すなわち，どんな曲線であっても，その一部を拡大していくと，いつかは直線で近似できる (直交座標系)，または円弧で近似できる (極座標系) と仮定して曲率 (3.3) を求めたことになる．

さて，性質 1) は直観的によいとして，性質 2) に違和感があるかも知れない．これは次のように考えるとよい．まず性質 2) の必要性について，もし性質 1) だけを使って全ての曲線を直線近似してしまうと，曲線の「曲っている」という性質が扱えなくなる．その対策として，直交座標系に描いた曲線をいったん極座標変換し，この極座標系で直線近似してから元にもどすという作戦をとる．極座標系における直線 (に相当するもの) は，元の直交座標系では円になる．(下図)



この図は，円周を指でなぞったときの極座標成分 (θ,r) の変化を θ-r 平面に表示したものである．θ-r 平面の直線は元の直交座標では真円となり，逆に，歪んだ円は r-θ 平面で曲線になる．この座標変換の性質を踏まえて，歪んだ円を真円で近似し，この真円の曲率によって曲線の「曲っている」性質を表現するわけだ．

したがって，無限小世界における作図では，まっすぐ担当が**直線**，曲り担当が**円**である．それ以外の部品は用意されない[6]．曲率 (3.3) の導出では，弧度法 (10.1) において円が使われ，このとき「曲線自体の曲り」が取り込まれる．それ以降は直線 (三角形) しか使ってない．ちなみに ds は円としても直線としても使われており，いわば 1 人 2 役だが，ds の振舞いを決めるのは座標系であって絵ではない．絵として曲っていても，直交座標のキャンバスに描かれれば直線だし，絵が直線でも極座標なら円 (の一部) である．誰がどのように作図しても曲率 (3.3) の結果は変らない．

以上，曲りを無視する無限小世界でも，**円** (曲率円) によって曲りが表現できることが分った．実用的には，弧度法 (極座標) を採用した時点で自動的に曲りが取込まれる．混乱したら，いまは円か？直線か？ と問えばよい．

10.3 全微分の公式

ちなみに**全微分の公式**とは，通常の世界の関数関係から，無限小どうしの関係を導く公式である．

$$\begin{array}{lll}
1\text{ 変数関数:}\quad y=f(x) & \Longrightarrow & dy=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx \qquad \left(=\dfrac{df}{dx}dx\right)\\
2\text{ 変数関数:}\quad z=f(x,y) & \Longrightarrow & dz=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy\\
3\text{ 変数関数:}\quad a=f(x,y,z) & \Longrightarrow & da=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}dz
\end{array}$$

これらの謎解きには，次章に述べる伝家の宝刀「 $(dx)^2=0$」が鍵になる．

算法 7 (偏微分): 式中の ∂ 付きの分数は**偏微分**という算法で，

$$\frac{\partial f}{\partial x} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} x \text{ 以外を定数と見なして } x \text{ で微分する．}$$

と定義される．特に f が 1 変数関数 $f(x)$ のときは

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{dx}$$

のように，偏微分は常微分に一致する． □

[6] と理解しておこう．

11

全微分の公式

よく見かける論法として，微小量 $\Delta x \ll 1$ で議論を始めて，途中で

- Δx を無限小と仮定して $\Delta x \to dx$ とする．ゆえに $(dx)^2 = 0$ である．

とするものがある．多くの場合，Δx が突然 dx に変身するので，なにが「ゆえに」なのか，著者などは学生のころ完全に思考停止に追い込まれた．この論法の正体に思いをはせながら，少しずつ議論を精密化していくことにしよう．

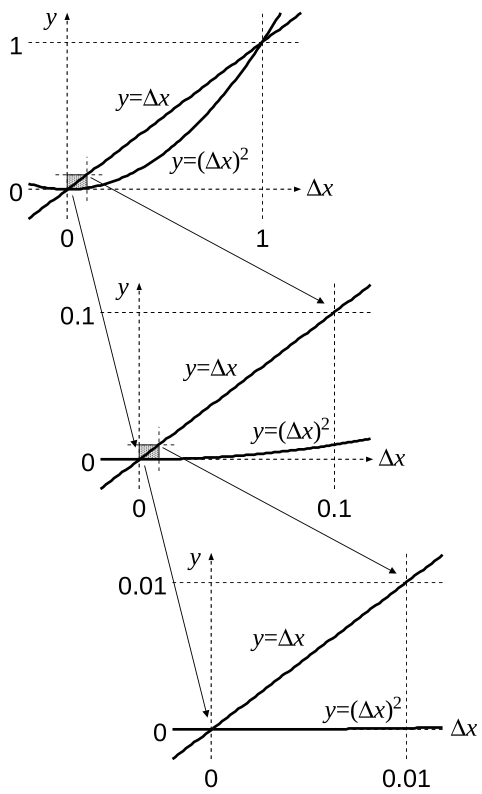
11.1 独立変数の微分 — $(dx)^2 = 0$

まず問題提起として，直観的には，例えば

Δx	$(\Delta x)^2$
1	1
0.1	0.01
0.01	0.0001
0.001	0.000001
0.0001	0.00000001
0.00001	0.0000000001

であるから，Δx が十分に小なら近似 $(\Delta x)^2 \fallingdotseq 0$ は納得できる．しかし，どんどん Δx を小さくしていくと，そもそも $\Delta x \fallingdotseq 0$ になりはしないか？

この問題を解明するために，1 次関数 $y = \Delta x$ と 2 次関数 $y = (\Delta x)^2$ の原点付近の振舞いを 10 倍ずつ拡大しながら観察してみる．



このように原点付近を拡大していくと，直線 $y = \Delta x$ の形状は全く変化しないが，2 次曲線 $y = (\Delta x)^2$ のグラフは猛スピードで水平線 $y = 0$ に近づく．

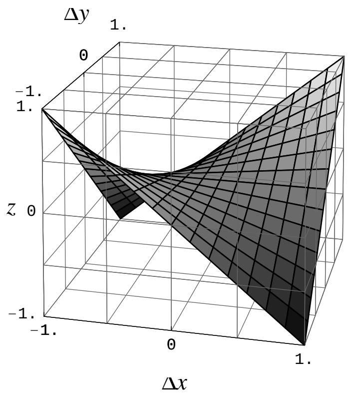
ところで，微分 dx とは，小さくないと文句を言われたら相手が納得するまで小さくなれる変数のことであった．これを踏まえて上述の Δx を dx で置きかえると，2 次関数 $y = (dx)^2$ は定数関数 $y = 0$ と見なせる．なぜなら「その程度の dx の小ささでは $y = (dx)^2$ は $y = 0$ に見えない」と文句を言われたら，$y = 0$ に見えるまで dx を小さくすればよい．そうできる約束である．一方で 1 次関数 $y = dx$ の方は，dx をいくら小さくしても 1 次関数のままである．すなわち，dx も $(dx)^2$ も共に無限小ではあるが，両者の性質は明らかに異なる．

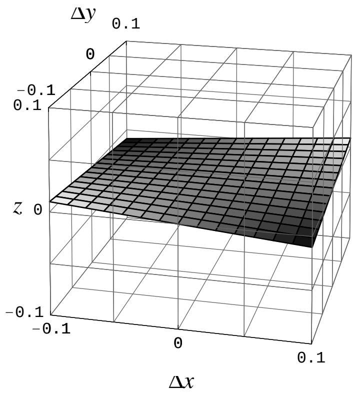
以上の観察結果を踏まえて，これ以降は次の算法を認めることにする．

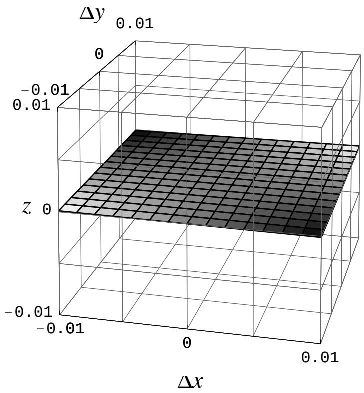
(d3) 無限小 dx を基準長さとみなす世界では，$(dx)^2 = 0$．

専門用語的には，dx を **1 位の無限小**，$(dx)^2$ を **2 位の無限小**と呼ぶ．以上の議論から，1 位の無限小を基準に寸法を測るときは，2 位の無限小は 0 とみなせる．ようするに，まっすぐな dx はそのままだが，曲った $(dx)^2$ はいくらでも平らになる．ゆえに，**曲ったもの** $(dx)^2$ **は無視** $(dx)^2 = 0$ できる．

2 位の無限小の例をもう 1 つだけ挙げる．曲面 $z = \Delta x \Delta y$ を考え，先ほどと同様に，原点 $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ 付近を 10 倍ずつ拡大していく．







このように原点付近を拡大していくと，曲面 $z = \Delta x \Delta y$ は猛スピードで水平面 $z = 0$ に近づく．したがって，$\Delta x, \Delta y$ を dx, dy で置きかえ，dx と dy がともに無限小であると仮定すると，$dxdy = 0$ と見なせる．なぜなら「その程度の dx や dy の小ささでは曲面 $z = dxdy$ は水平面 $z = 0$ に見えない」と言われたら，平面 $z = 0$ に見えるまで dx, dy を (独立に) どんどん小さくすればよい．したがって，次の規約も認めざるを得ない．

(d4)　無限小 dx と dy を基準長さとみなす世界では，$dxdy = 0$．

以上，(d1) から (d4) までの議論を認めると，

算法 8 (独立変数の微分): x, y を独立変数とする．このとき，x, y の微分 dx, dy について，次の算法が成立する．

$$(dx)^2 = 0, \quad (dy)^2 = 0, \quad dxdy = 0$$

この他，従属変数の微分は算法 9 (p.90) に従う．　□

Note (2 位の無限小が基準の場合 — その 1):　本書には出てこないが，2 辺の長さが dx と dy であるような長方形の面積 $dxdy$ の大きさを基準に考える場合もある．こんどは $dxdy$ が基準なので $dxdy = 0$ だと何も議論できない．そこで $dxdy \neq 0$ として議論を進めるのだが，すると歪 (わい) 対称性

$$dxdy = -dydx$$

が表面化してくる (1 位の無限小 dx, dy を基準にするときは，$dxdy = -dydx = 0$ であるため表面化しなかった)．歪対称性 $dxdy = -dydx$ を認めると，特に $x = y$ のとき $dxdx = -dxdx$ より $2(dx)^2 = 0$ となるから $(dx)^2 = 0$ が帰結され，同様に $(dy)^2 = 0$ である．すなわち，2 位の無限小 $dxdy$ を基準とする世界では，次の算法が成立する．

$$dxdy = -dydx, \quad (dx)^2 = 0, \quad (dy)^2 = 0 \tag{11.1}$$

11.2 テイラー展開

自由落下運動は 2 次関数 $y = -gt^2$ で表わされる (y は垂直位置で t は時間)．恐らく当時，測定データの法則を $t, t^2, t^3, \cdots$ の組合せで書こうという作戦があって，自由落下運動の場合は t^2 までの項でぴったり合ったので，2 次関数 $y = -gt^2$ が自由落下運動の法則であると結論づけた節がある．同様に，他の測定データについても $t, t^2, t^3, \cdots$ の組合せで表現できるに違いないと夢はふくらんだことだろう．$t, t^2, t^3, \cdots$ の組合せこそが神の原理だと ⋯

だかどうだか歴史的真相は定かでないが，1 変数関数 $f(t)$ を

$$f(t) = 3.1 + 1.4t + 0.8t^2 + 4.3t^3 + \cdots$$

のように表現したかったことだけは確かである．人類の叡智によればそれは可能で，次式を $f(t)$ の**テイラー展開**と呼ぶ[1]．

$$f(x + \mathit{\Delta} x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\mathit{\Delta} x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathit{\Delta} x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(\mathit{\Delta} x)^n \tag{11.2}$$

実用的には，例えば $n = 10$ などとして有限の項 $(\mathit{\Delta} x)^n$ で打ち切って利用する．自由落下運動の場合は，2 次 $(\mathit{\Delta} x)^2$ までで展開が止まるが，一般にはそうとは限らず，$n \to \infty$ としないと誤差が残る．誤差を小さくするには，次数 n を増すか，あるいは $\mathit{\Delta} x$ を小さく設定する．

11.3 従属変数の微分 — 全微分の公式

さてここで，(11.2) の $\mathit{\Delta} x$ を dx に置き換えると，**従属変数の微分**の公式である**全微分の公式**が導かれる．まず，$f(x)$ の全微分 $df(x)$ を

$$df(x) \equiv f(x + dx) - f(x)$$

と定める．すると (11.2) より，

[1] 不慣れな読者は A 章 (p.101) に簡単な解説がある．

$$
\begin{aligned}
df(x) &\equiv f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + \cdots - f(x) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

となるが，$(dx)^2 = 0$ より $(dx)^3 = (dx)^2 dx = 0$，それ以降も同様にして $(dx)^4 = (dx)^5 = \cdots = 0$ となり

$$
df(x) = \frac{\partial f}{\partial x}dx
$$

を得る．次に 2 変数関数 $f(x,y)$ の微分 $df(x,y)$ を

$$
df(x,y) \equiv f(x+dx, y+dy) - f(x,y)
$$

と定める．これに 1 変数の全微分の公式を使うため，足し引きの小技を使い，

$$
= f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy) + f(x, y+dy) - f(x,y)
$$

とすると，$y+dy$ と $y+dy$ など，変数が共通の部分を定数とみて (取消線)

$$
\begin{aligned}
&= f(x+dx, \cancel{y+dy}) - f(x, \cancel{y+dy}) + f(\cancel{x}, y+dy) - f(\cancel{x}, y) \\
&\equiv df(x, \cancel{y+dy}) + df(\cancel{x}, y) \\
&= \frac{\partial f(x, \cancel{y+dy})}{\partial x}dx + \frac{\partial f(\cancel{x}, y)}{\partial y}dy
\end{aligned}
$$

のように dx, dy を外に出す．残った dy も同様に外に出すと

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\frac{\partial f(\cancel{x}, y+dy)}{\partial x} - \frac{\partial f(\cancel{x}, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(\cancel{x}, y)}{\partial x}\Big)dx + \frac{\partial f(\cancel{x}, y)}{\partial y}dy \\
&= \Big(d\big(\frac{\partial f(\cancel{x}, y)}{\partial x}\big) + \frac{\partial f(\cancel{x}, y)}{\partial x}\Big)dx + \frac{\partial f(\cancel{x}, y)}{\partial y}dy \\
&= \Big(\frac{\partial^2 f(\cancel{x}, y)}{\partial y \partial x}dy + \frac{\partial f(\cancel{x}, y)}{\partial x}\Big)dx + \frac{\partial f(\cancel{x}, y)}{\partial y}dy \\
&= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}dydx \\
&= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad \because dydx = 0
\end{aligned}
$$

したがって，2 変数の全微分の公式を得る．

$$
\begin{aligned}
df(x,y) &\equiv f(x+dx, y+dy) - f(x,y) \\
&= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy
\end{aligned}
$$

以上をまねれば，3 変数，4 変数 $\cdots$ と作っていけて，まとめると

算法 9 (全微分の公式): x, y, z を独立変数，f, g, h をその従属変数とすると，

$$
\begin{array}{llll}
1\text{ 変数関数:} & f=f(x) & \Longrightarrow & df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx \quad =\dfrac{df}{dx}dx \\
2\text{ 変数関数:} & g=g(x,y) & \Longrightarrow & dg=\dfrac{\partial g}{\partial x}dx+\dfrac{\partial g}{\partial y}dy \\
3\text{ 変数関数:} & h=h(x,y,z) & \Longrightarrow & dh=\dfrac{\partial h}{\partial x}dx+\dfrac{\partial h}{\partial y}dy+\dfrac{\partial h}{\partial z}dz
\end{array}
$$

同様にして，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を独立変数，p をその従属変数とすると，

$$
\text{n 変数関数:} \quad p=p(x_1,\cdots,x_n) \Longrightarrow \quad dp=\frac{\partial p}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial p}{\partial x_n}dx_n
$$

が成立する． □

以上に導入した**算法** 8 (p.88) と**算法** 9 (p.90) を利用すると，あっという間に材料力学の公式が導かれるのだが，次章でそれをやる．

Note (2 位の無限小が基準の場合 — その 2): せっかくだから，置換積分の公式について述べておく．全微分の公式と，歪対称性に関する公式 (11.1) から簡単に導ける．さて考えるべきは，2 変数関数 $f(x,y)$ の積分

$$
\iint f(x,y)dxdy
$$

に対して変数変換 $x=p(u,v),\ y=q(u,v)$ を行い

$$
\iint f\big(p(u,v),q(u,v)\big)\ \boxed{\text{ほにゃらら}}\ dudv
$$

と書きたいとき，$dxdy=\boxed{\text{ほにゃらら}}\ dudv$ という関係式に含まれる $\boxed{\text{ほにゃらら}}$ をどう定めるか？—といった問題である．$dxdy=0$ だと意味をなさないから $dxdy\neq 0$ と仮定する．すると歪対称性 $dxdy=-dydx$ が現れることは既に述べた．まず，全微分の公式より

$$
\begin{aligned}
dxdy &= (\frac{\partial p}{\partial u}du+\frac{\partial p}{\partial v}dv)(\frac{\partial q}{\partial u}du+\frac{\partial q}{\partial v}dv) \\
&= \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial u}dudu+\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}dudv+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}dvdu+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial v}dvdv \\
&= \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial u}(du)^2+\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}dudv+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}dvdu+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial v}(dv)^2
\end{aligned}
$$

続いて，算法 (11.1) より

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}dudv+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}dvdu \qquad \because (du)^2=(dv)^2=0 \\
&= \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}dudv-\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}dudv \qquad \because dudv=-dvdu\ (\text{歪対称性})
\end{aligned}
$$

したがって，$dxdy=\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right)dudv$ が判明する．以上，置換積分の公式を得る．さらにこの結果を行列式を使って $dxdy=\begin{vmatrix}\frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v}\\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v}\end{vmatrix}dudv$ と表示するとき，その行列式を**ヤコビアン**と呼んだ．微積分の教科書を復習してみよ．

Note (外微分): さらに余談だが，関数 $f(x)$ の 2 回の微分商

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

は分母が $(dx)^2 = 0$？ — という心配はなくて，上式の分子 $d^2 f$ が，f の全微分 df のさらに全微分 $d(df)$ であることに注意すると[2)]，

$$\begin{aligned} df(x) &= \frac{df(x)}{dx}dx \quad \text{を前提として} \\ d^2 f(x) &\equiv d(df(x)) = d\Big(\frac{df(x)}{dx}\Big)dx \\ &= \Big(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}dx\Big)dx = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}(dx)^2 \quad \text{だから,} \\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \frac{\frac{d^2 f(x)}{dx^2}(dx)^2}{(dx)^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Big(\frac{dx}{dx}\Big)^2 = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \end{aligned}$$

という算法を認めることで矛盾は回避できる．

2) 微分幾何学に出てくる**外微分**という算法である．

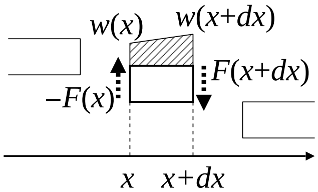
12

なぜ荷重を 4 回積分するのか？

9 章までは天下りに与えていた**算法 6 (p.61)** の原理を解明する．$(dx)^2=0$ と全微分の公式で全て片づく．議論の途中でいつの間にか Δx が dx に変身するような論理の飛躍よ，さようなら．

12.1 荷重 $\Leftrightarrow$ せん断力

本編では内力を考える際に「2 分割」を多用したが，ここでは「3 分割」を使う．**定義 3 (p.14)** によれば，はりの右が沈むとき，せん断力 $F(x)$ は正であった．このとき，幅 dx の微小要素が受ける並進力は次のようになる．斜線の $w(x)$ は分布荷重である．矢印は内力の正の向きにとった．



まず，dx のスケールでは曲りを無視できるから，分布荷重の $w(x)$ の総和は斜線の台形で近似できて，この微小要素が静止するための力のつり合い式が

$$\frac{1}{2}\Big(w(x)+w(x+dx)\Big)dx+F(x+dx)-F(x)=0$$

のように定まる．これを $(dx)^2=0$ と全微分の公式で整理すると，

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\Big(w(x)+w(x)+\frac{dw(x)}{dx}dx\Big)dx+F(x)+\frac{dF(x)}{dx}dx-F(x)=0\\
&\Longleftrightarrow w(x)dx+\frac{1}{2}\frac{dw(x)}{dx}(dx)^2+\frac{dF(x)}{dx}dx=0\\
&\Longleftrightarrow w(x)dx+\frac{dF(x)}{dx}dx=0 \qquad \because (dx)^2=0\\
&\Longleftrightarrow \Big(w(x)+\frac{dF(x)}{dx}\Big)dx=0
\end{aligned}$$

より微分方程式

$$\frac{dF(x)}{dx} = -w(x) \qquad (\because dx \neq 0) \tag{12.1}$$

を得る．これで理論は完成である．

単なる尾ひれとして，本書の体裁に合せて (12.1) と同じことを積分表示するには，(12.1) を x について 0 から x まで定積分すればよい．

$$\frac{dF(x)}{dx} = -w(x) \implies \int_0^x \frac{dF(x)}{dx}dx = -\int_0^x w(x)dx$$

$dF(x)/dx$ の原始関数は $F(x)$ だから，

$$F(x) = F(0) - \int_0^x w(x)dx$$

となるが，本書ではデルタ関数の使用を認めるから，

$$= -\int_0^x -F(0)\delta(x) + w(x)dx$$

改めて $w(x) \equiv -F(0)\delta(x) + w(x)$ とおき直すと，

$$F(x) = -\int_0^x w(x)dx$$

を得る．($F(0) = 0$ の場合を含む)

特に本書では，集中せん断力 $G(x)$ を考慮するので上式に $G(x)$ を加えた

$$\mathcal{F}(x) = F(x) + G(x) = -\int_0^x w(x)dx + G(x)$$

の $\mathcal{F}(x)$ が算法 6 (p.61) の公式 (B1) である．

以上が，荷重 $w(x)$ からせん断力 $F(x)$ へ至る算法の原理である．

12.2　誤解の考察

困ったことに，どの教科書の解説も「幅 dx は無限小だから $w(x)$ は一定と見なせる」と読めてしまう．これを信じると「dx が無限小ならば，$w(x) = w(x + dx)$ ないしは $\frac{dw}{dx} = 0$」ということになる．ところが $F(x)$ については，幅 dx の両端の高低差を取り出して使うわけだから $F(x) \neq F(x + dx)$ でないと公式が作れない．ということは同じ幅 dx の両端で，

$$w(x) = w(x + dx) \quad \text{かつ} \quad F(x) \neq F(x + dx) \qquad \cdots \text{なにそれ?!}$$

という矛盾に直面した初学者は，$w(x)$ と $F(x)$ の関数形の違いを，何らかの物理的考察からこじつけようとして大混乱に陥いる．予備知識のないところに，そう読めてしまうのだから無理もない．

結論からいうと，$w(x)$ と $F(x)$ の性質の違いは公式の導出には使わない．という

か，そもそも dx が無限小だからといって $w(x) = w(x+dx)$ ないしは $\frac{dw}{dx} = 0$ にはならない[1)]．冷静に考えれば，傾き $\frac{dw}{dx}$ とは，曲線 $w(x)$ の形状と位置 x だけから定まる量だから，勝手にとる幅 dx とは無関係である．したがって正確な理解は，上に計算した通り，

- 微小要素から **2 次元の量**を計算すると $(dx)^2$ がでてくる．
- $(dx)^2 = 0$ より，$w(x)$ の変化率 $\frac{dw}{dx}$ を含む項 $\frac{dw}{dx}(dx)^2$ などが消える．

である．ようするに $\frac{dw}{dx}$ は，$(dx)^2 = 0$ の道連れにされて消滅するわけで，$\frac{dw}{dx}$ それ自体が 0 になるわけではない．（$F(x)$ は dx しか付かないので生き残る）

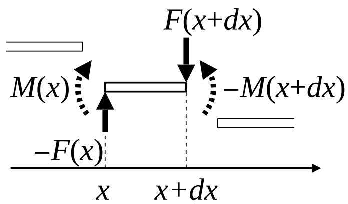
以上を踏まえて，通常の教科書の行間を補えば，

> 幅 dx は無限小だから $\cdots$ $(dx)^2 = 0$ が成立する．ゆえに，荷重 $w(x)$ が発生する並進力について
>
> $$w(x)dx + \frac{1}{2}\frac{dw(x)}{dx}(dx)^2 = w(x)dx$$
>
> が成立する．すなわち，$(dx)^2 = 0$ の帰結として $w(x)$ の変化率 $\frac{dw(x)}{dx}$ は式から消える．この計算結果は $w(x)$ を一定と見なしたときと同じなので，無理に逆算すれば $\cdots$ $w(x)$ は一定と見なせる．

である．ある理論が常識化して孫やひ孫の世代になると，まさに伝言ゲームの要領で，元来のニュアンスが不用意にどんどん落されていくようだ．

12.3 せん断力 ⇔ 曲げモーメント

引き続き「3 分割」で考える．まん中の微小要素が受けるせん断力 $F(x)$ と曲げモーメント $M(x)$ を下図に示す．矢印は内力の正の向きにとった．



まずは全微分の公式で dx と dy を外に出すと

$$F(x+dx) = F(x) + \frac{dF}{dx}dx$$

$$M(x+dx) = M(x) + \frac{dM}{dx}dx$$

こんどの目標は，幅 dx の微小要素が回転しないためのトルクのつり合い式をたてることである．まず，せん断力 $F(x)$ が発生するトルク T_F を調べる．例えば右端を

[1)] 老婆心ながら，$w(x)$ が定数関数なら $dw/dx = 0$

基準点にとると，

$$T_F = F(x)dx$$

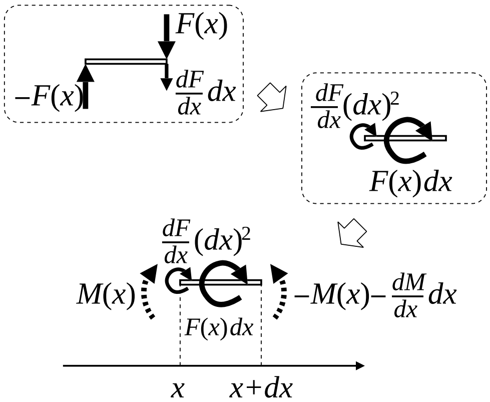
あるいは左端を基準点とすると

$$T_F = F(x+dx)dx = F(x)dx + \frac{dF(x)}{dx}(dx)^2 = F(x)dx \qquad \because\ (dx)^2 = 0$$

となり，いずれにしても $T_F = F(x)dx$ を得る．

> **Note:**　この状況を通常の教科書では「幅 dx は無限小だから $F(x)$ を一定と見なす」などと表現するが，$F(x)$ に関して $F(x)dx$ 以外の項が消滅するのは，あくまで $(dx)^2 = 0$ からの帰結であって，$\frac{dF(x)}{dx} = 0$ からの帰結ではないことは既に述べたとおりである．

以上に求めた $F(x)$ の回転作用 $T_F = F(x)dx$ について，通常の教科書の行間に隠れていそうな別解も挙げておこう．下図を見てほしい．



まず，右端の $F(x+dx)$ は，全微分の公式 $F(x+dx) = F(x) + \frac{dF}{dx}dx$ により，$F(x)$ と $\frac{dF}{dx}dx$ の合力とみなせる．このうちの $F(x)$ と左端の $-F(x)$ のペアによって偶力 $F(x)dx$ が発生する (p.49「**偶力**」参照)．右端に残った $\frac{dF(x)}{dx}dx$ が作る回転作用 T'_F は，幅 dx 内の基準点 $x + kdx$ $(0 \le k \le 1)$ において (図は $k = 0$)

$$\begin{aligned} T'_F &= \Big(\underbrace{(x+dx)-(x+kdx)}_{\text{右端までの距離}}\Big)\frac{dF(x)}{dx}dx \\ &= \Big((1-k)dx\Big)\frac{dF(x)}{dx}dx \\ &= (1-k)\frac{dF(x)}{dx}(dx)^2 = 0 \qquad \because\ (dx)^2 = 0 \end{aligned}$$

と計算できるから，幅 dx 内のどこで測っても $T'_F = 0$ である．ようするに，$(dx)^2 = 0$ を仮定すると，せん断力 $F(x)$ が発生するトルクとして偶力 $F(x)dx$ だけが残り，先ほどと同じ結果 $T_F = F(x)dx$ を得る．

以上から，モーメントのつり合い式は

$$
\begin{aligned}
&F(x)dx + M(x) - M(x+dx) = 0 \\
&\iff F(x)dx + M(x) - M(x) - \frac{dM(x)}{dx}dx = 0
\end{aligned}
$$

となる．これから微分方程式

$$\frac{dM(x)}{dx} = F(x) \tag{12.2}$$

を得る．これで理論は完成である．

多分に蛇足だが，本書の体裁に合せて (12.2) と同じことを積分表示するには，(12.2) を x について 0 から x まで定積分すればよい．

$$
\begin{aligned}
\frac{dM(x)}{dx} = F(x) \implies &\int_0^x \frac{dM(x)}{dx}dx = \int_0^x F(x)dx \\
&\iff M(x) = M(0) + \int_0^x F(x)dx
\end{aligned}
$$

本書ではデルタ関数の使用を認めるから

$$\iff M(x) = \int_0^x M(0)\delta(x) + F(x)dx$$

となる．ここで改めて $F(x) \equiv M(0)\delta(x) + F(x)$ と置くと，**算法 6** (p.61) の (B2)

$$M(x) = \int_0^x F(x)dx$$

を得る．($M(0) = 0$ の場合を含む)

以上が，せん断力 $F(x)$ から曲げモーメント $M(x)$ へ至る算法の原理である．

12.4 4 階の微分方程式

これまでに構成した算法を全て列挙すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{dF(x)}{dx} &= -w(x) \\
\frac{dM(x)}{dx} &= F(x) + G(x) \\
\frac{d^2y(x)}{dx^2} &= -\frac{1}{EI}M(x)
\end{aligned}
$$

となる．この 3 式を組み合せると，荷重 $w(x)$ からたわみ曲線 $y(x)$ へ至る算法を 1 本の微分方程式で書ける．簡単のため $G(x) = 0$ の場合を考える．

まず，第 3 式 (たわみの微分方程式) を第 2 式に代入すると，

$$\frac{d}{dx}\Big(- EI\frac{d^2y(x)}{dx^2}\Big) = F(x)$$

これを第 1 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}\Big(- EI\frac{d^2y(x)}{dx^2}\Big) = -w(x) \\
\therefore \quad &\frac{d^2}{dx^2}\Big(EI\frac{d^2y(x)}{dx^2}\Big) = w(x) \qquad (12.3)
\end{aligned}
$$

を得る．以上，荷重 $w(x)$ からたわみ曲線 $y(x)$ に至る算法が 1 本の微分方程式 (12.3) にまとまった．特に，剛性 EI が定数のときは次式となる．

$$EI\frac{d^4y(x)}{dx^4}=w(x)$$

上式によれば $w(x)$ を 4 回積分して $y(x)$ が求まる原理が一目瞭然である．

ただし，ここまで整理してしまうと集中せん断力 $G(x)$ を入れる場所がなくなる．なぜなら，積分してデルタ関数になるような適当な関数が世の中に存在しないからである[2)]．多くの工学理論では，この種の困難を積分型の算法によって回避するようだが，本書の算法も似たようなものである[3)]．

もちろん，かつてディラックが行ったように (以下は著者のほら吹きである)，積分するとデルタ関数になるような関数:

$$\delta^*(x) \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \delta(x)=\int_0^x \delta^*(x)dx$$

なんかを形式的に導入すれば，例えば荷重分布関数を $w(x)$，集中せん断力 $G(x)=a\delta(x-b)$ とするとき，はりの変形の支配方程式が

$$EI\frac{d^4y(x)}{dx^4}=w(x)-a\delta^*(x-b)$$

などと書けるわけだが，この種の拡張が意味をもつのは広範な応用が期待される場合に限られるのだと思う．ようするに，新たな関数 $\delta^*(x)$ が本書の計算にしか使えないような代物ならば，それは $y=ax+b$ を $x=\alpha t+\beta$ と書きかえる程度の意味しか持たない．

とはいえ，未来はあくまで未定である．将来的にこのような関数が重要な意味を持ちだすのかどうなのか，理工学の発展に期待しようではないか．

[2)] 実は著者が知らないだけで，すでにあったりして …

[3)] 通常の材料力学の教科書は，言葉による積分？

補遺 — はりの振動解析に向けて

これから述べることは本書の範囲を超えるが，なりゆき上もったいないので補遺としてつけておく．

さて，前章の最後で 4 階の微分方程式を求めたが，実は，これを僅かに拡張するだけで，はりがどう揺れるかが計算できるのだ．本書を終えるにあたって，そのための準備だけはしておこう．

物語は，前章までに構成した静力学の公式

$$\frac{dF(x)}{dx} = -w(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F(x)$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{1}{EI}M(x)$$

から始まる．第 1 の拡張は，$y(x)$, $M(x)$, $F(x)$, $w(x)$ を時間の関数 $y(x,t)$, $M(x,t)$, $F(x,t)$, $w(x,t)$ と見なすことである．こうしても，常微分 $\frac{d}{dx}$ を偏微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ に変更すれば，上式がそのまま成立する．

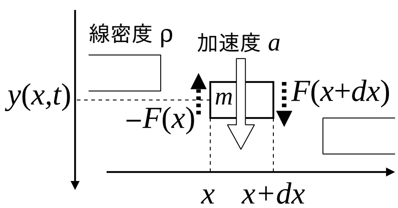
$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = -w(x,t)$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = F(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{EI}M(x,t)$$

結論からいうと，あともう 1ヶ所変更すれば動力学への拡張は完了する．変更するのは第 1 式のみで，第 2，第 3 式はそのままである．具体的には，第 1 式の荷重 $w(x,t)$ に鉛直方向の慣性力 $\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ を代入すれば拡張が完了するのだが，ではなぜ $\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ が慣性力か？— 再び「3 分割」で考えよう．

はりの変形 (p.3) で述べたように，材料力学においては，はりの各点は y 方向にしか動かないから，ここでは y 方向のみの作用を考える．はりは線密度 ρ kg/m の質量を有し，外からの荷重は受けないとする．



微小要素に作用する接触力は，dx 両端でのせん断力の差 $F(x+dx)-F(x)$ のみである．この接触力は，ニュートンの法則により質量 m と加速度 a による慣性力 ma とつり合うから，y 方向を正として，

$$ma = F(x+dx) - F(x)$$

が成立する．線密度 ρ より $m = \rho dx$ であり，ニュートンの法則により加速度 $a = \partial^2 y/\partial t^2$ が成立するから，これらを代入すると，

$$\begin{aligned}
\rho dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= F(x+dx) - F(x) \\
&= \frac{\partial F(x)}{\partial x} dx \qquad \text{(全微分の公式)} \\
\therefore \quad \rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}
\end{aligned}$$

が成立する．これから順次，

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(-EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \Big) \\
&= -EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} \qquad (EI \text{ は定数})
\end{aligned}$$

となり，はりの振動を記述する運動方程式

$$\rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = 0 \tag{12.4}$$

を得る．これは，はりの支持方法によらずに成立する運動方程式である．はりの支持方法は境界条件として与える．

微分方程式 (12.4) の未知関数は，たわみ曲線 $y(x,t)$ であるから，微分方程式 (12.4) を解けば，はりの形状が時間的にどう変動するか，すなわちどう揺れるかを計算できることになる．

これで準備は完了である．(12.4) をどう解くかは本書の範囲を超えるので，適当な振動学，ないしは振動工学の教科書を参照してほしい．

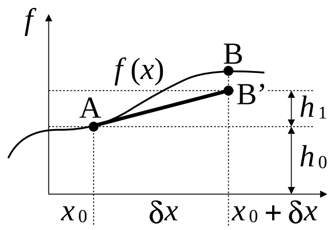
A

テイラー展開

ここではテイラー展開の意味するところを概説する．

A.1　1 変数関数 $f(x)$ の場合

テイラー展開とは，ある基準点の関数値とその微分値のみを用いて，基準点から離れた地点の関数値を予測する測量法である．まずは，最も簡単な 1 変数関数 $f(x)$ の場合を考えよう．下図はその模式図である．スケッチしながら読みすすめてほしい．



基準点 A の座標を x_0 とする．座標 x_0 における関数値とその微分値のみが既知と仮定する．すなわち $f(x_0)$ と $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$ が既知[1]．この事前情報のみに基づいて，基準点から δx だけずれた地点 B での関数値 $f(x_0+\delta x)$ を表現したい．

すぐに思いつくアイデアは，A 点における $f(x)$ の接線を δx だけ延長し，その終点 B' を，B 点にある本当の関数値 $f(x_0+\delta x)$ の 1 次近似とすることである．この素朴な発想がテイラー展開の基本である[2]．A 点での高さ h_0，および接線の延長による増分を h_1 とすると，これらは下表のようになる．

h_0	$f(x_0)$	元々既知
h_1	$\delta x \cdot \frac{df(x)}{dx}\|_{x=x_0}$	増分の推定値

---

[1] より高次の展開では $\frac{d^n f(x)}{dx^n}|_{x=x_0}$ の値も必要．ここでは，1 次の展開なので n=1 までの事前情報で十分である．

[2] 高次まで展開すると，より曲った形状，より遠方の形状を，より正確に表現できる．

以上を式で書くと

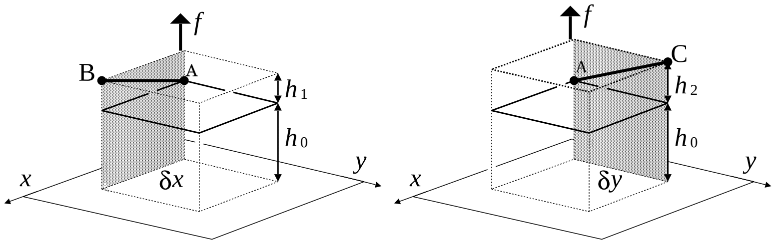
$$f(x_0+\delta x)=h_0+h_1 \fallingdotseq f(x_0)+\delta x\cdot\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$$

となる[3)]．読者は，上図と上式を何度も往復し，意味するところを体得してほしい[4)]．

A.2　2 変数関数 $f(x,y)$ の場合

さて，2 変数関数 $f(x,y)$ に対して同様に接線延長の操作を行う．ここでの目標は，ずらす方向を 1 つ増やし，基準点 (x_0,y_0) から x 方向に δx，y 方向に δy だけずれた地点での関数値 $f(x_0+\delta x,y_0+\delta y)$ を，基準点における関数値 $f(x_0,y_0)$ およびその微分値で表現することである．

まずは準備のための部品を用意しておく．下に部品図を示す．ある曲面上の基準点を (x_0,y_0) (A 点，高さ h_0) とし，そこから個別に x 方向，y 方向に接線を延長した様子を表している．延長の終点は，それぞれ B 点，C 点 である．



x 方向の接線　　　y 方向の接線

これら接線延長に伴なう高さの増分をそれぞれ h_1, h_2 と書けば，h_0, h_1, h_2 の値は下表となる．1 変数の場合と比較すると，常微分記号が偏微分記号に置き換えられるが，これは扱う方向が増えたがための置き換えであり，意味するところは全く同じである[5)]．

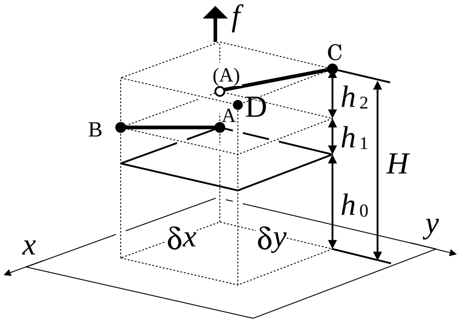
h_0	$f(x_0,y_0)$	元々既知
h_1	$\delta x\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$	x 方向増分の推定値
h_2	$\delta y\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$	y 方向増分の推定値

これで準備完了である．さて念願の $f(x_0+\delta x,y_0+\delta y)$ の推定値を得るために，少々乱暴に思えるかもしれないが，以上で求めた部品を 3 段重ねしてしまう (下図)．

[3)] $\fallingdotseq$ を用いるのは，実はかなりいいかげんである．本来は，右辺に $+O(\delta x^2)$(オミクロン) の項を付加し，$=$ で表現する．こうしておくと近似誤差を厳密に計算できるので，何次までの展開で満足するかの目安が得られる．

[4)] 最も簡単な数値積分法であるオイラー法のアイデアが，この式そのものであることに気付いた読者はいるだろうか？

[5)] 左図を例に取り，線分 AB を含む垂直断面 (ハッチング) を考えると，偏微分はこの断面内の常微分と等価である．



この図の D 点を，$f(x_0+\delta x, y_0+\delta y)$ の推定値とみなすのが，テイラー展開のアイデアである．式で書くと，

$$\begin{aligned} f(x_0+\delta x, y_0+\delta y) &= h_0+h_1+h_2 \\ &\fallingdotseq f(x_0,y_0)+\delta x\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \\ &\quad+\delta y\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \end{aligned}$$

A.3　テイラー展開と高次微小量

次式はよく目にする近似法である．

$$\sin x \fallingdotseq x \qquad (x\ は微小) \tag{A.1}$$

これを「多項式[6] による $\sin x$ の **1 次近似**」と呼ぶ．もちろん 2 次以上もある．(A.1) は $\sin x$ のテイラー展開[7]の 第 1 項 のみ取り出したから 1 次近似 なのである．図 A.1 に示すように，近似の次数が 1, 3, 5 と増すごとに，より遠い所まで寄り添う[8]．これが**テイラー展開の機能** [6] である．

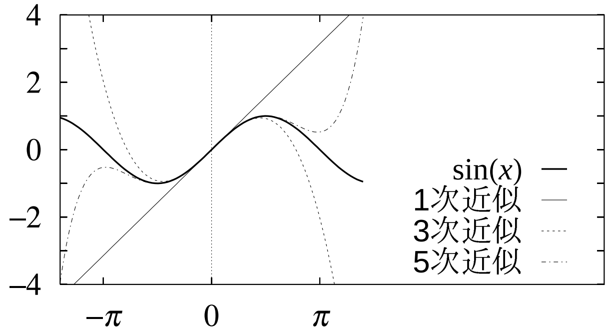
ここでグラフの高低差，すなわち**近似誤差**を数値として眺めてみよう．

x	1 次近似の誤差 $O(x^3)$	3 次近似の誤差 $O(x^5)$	5 次近似の誤差 $O(x^7)$
-1.2	0.288%	-0.022%	0.001%
-0.6	0.063%	-0.001%	0.000%
0.0	0.000%	0.000%	0.000%
0.6	0.063%	-0.001%	0.000%
1.2	0.288%	-0.022%	0.001%

[6]「x の多項式」とは x^0, x^1, x^2, $\cdots$ の各定数倍の足し算（線形和）で書かれる式のことである．

[7] 基準点 $x=0$ で取得できる情報のみから原点以外の関数値を見積る，という機能を持つ．

[8] 展開の基準点である $x=0$ を中心に遠くまでの意．$x=2$ を基準にテイラー展開すると今度は $x=2$ を中心に寄り添う．



$\sin x$ の 1 次近似	x
$\sin x$ の 3 次近似	$x - \frac{1}{3!}x^3$
$\sin x$ の 5 次近似	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$

図 **A.1**　テイラー展開による $\sin x$ の近似

このうち，例えば $x = -0.6$ のときの状況は

$$\sin x = \overbrace{x \overbrace{- \frac{1}{3!}x^3 \underbrace{+ \frac{1}{5!}x^5 \underbrace{- \frac{1}{7!}x^7 + \cdots}_{0.000\%}}_{-0.001\%}}^{0.063\%}}^{\text{全体 } 100\%}$$

と説明できる．x^n の n が大きくなればなるほど，近似という「お仕事」に対する分担が減っている．この条件では， x さんだけでも誤差は 1% 未満で，後続の $n \geq 3$ の方々は居ても居なくても同じである．これらを**高次の微小量**と呼ぶ.

以上から，x が 1 より十分小さい条件 (よく $x \ll 1$ と書く) では，高次の微小量 $-\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$ を**御都合により無視**しても文句は出ない.

最後に，このような状況をメモするための数学記号，(通称) オミクロン O を紹介しよう．定義は次の通り.

$$\sin x = \overbrace{0x^0 \underbrace{+ x^1 \overbrace{- 0\frac{1}{2!}x^2 \underbrace{- \frac{1}{3!}x^3 \overbrace{+ 0\frac{1}{4!}x^4 + \cdots}^{O(x^4)}}_{O(x^3)}}^{O(x^2)}}_{O(x^1)=O(x)}}^{O(x^0)=O(1)}$$

つまり $O(x^3)$ とは「x^3 以上の全ての項」の略記である．これを使って例えば $\sin x$ の 1 次近似を

$$\sin x = x + O(x^3) \doteqdot x$$

とメモする．$=$ と $\fallingdotseq$ との違いに気をつける[9)]．$x \ll 1$ のときの $O(x^3)$ の意味は「x の 3 次以上で生じる微小量」である．短縮して **3 次微小量**と呼ぶ．基準となる x そのものを **1 次微小量**と呼ぶ．

ちなみに，x^2 を 1 次微小量と見たときの 3 次微小量は $O(x^6)$ である．この場合は x^6 が基準の 3 乗だからである．

この記法の御利益は $\sin x$ に対して行った近似操作の内情，例えば 1 次の場合の

$$\sin x = x + 0x^2 + O(x^3) \quad \neq x + O(x^2)$$

を明示できる点にある．つまり「x^2 は書いてないけど，そこで近似を打切ったわけじゃない．たまたま係数が 0 だった.」ということを正確にメモできる[10)]．てなわけで 3 次近似なら

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)$$

とメモしておくのが常套手段である．

[9)] $x + O(x^3)$ は $\sin x$ の別表記と見なす．$x + (\sin x - x)$ の意．$1 + (2)$ が 3 の別表記なのと同じ．

[10)] $\sin x$ を $x = 0$ を中心にテイラー展開したときの x^2 の係数 $-\frac{1}{2!}\sin 0$ は恒等的に $= 0$ である．ところが例えば $x = 2$ を中心に展開すると，x^2 の係数は $-\frac{1}{2!}\sin 2$ になるので x^2 の項は $-x^2\frac{1}{2!}\sin 2$ として残る．

関連図書

[1] 高橋幸伯，町田進: 『基礎 材料力学』(培風社, 2000 年) など.

[2] 洲之内治男，和田淳蔵: 『改訂 微分積分』(サイエンス社, 1986 年) など.

[3] 並木美喜雄: 『デルタ関数と微分方程式』(岩波書店, 1995 年).

[4] 高橋康: 『物理数学ノート』(講談社, 1992 年).

[5] 高瀬正仁: 『dx と dy の解析学 — オイラーに学ぶ』(日本評論社, 2000 年).

[6] 長沼: 『物理数学の直観的方法』(通商産業研究社, 2000 年).

おわりに

講義のときアンケートをとるのだが，

- この計算結果が何を意味するのか，具体的な機械の構造で説明してほしい．

といった著者の説明不足を指摘する意見に混って，それとは正反対ともとれる，

- デルタ関数は実用的だ．

という感想が少なからず寄せられたことに驚いた．我ながら設計の講義にしては基礎理論を強調しすぎてしまったかな，という反省があったので，前者の反応はある程度予想していたのだが，後者の「実用的」なる評価は予想外であった．

デルタ関数という具体的な機械の構造に直接関係ない部分を，なぜに学生諸君は実用的と評したのか？ — これに関して若干のほらを吹きつつ，本書の結びとしたい．

学生と雑談していると，現代の学生諸君は「自分には独創性がない」ということを大変に気に病んでいることに気付く．これは，欧米後追い型からの脱却などといった世論を，自らに課せられた社会的使命として真摯に受けとめていることの顕れだと思うのだが，そう自覚したところで果して何をどうすればよいのか皆目見当もつかず，結局のところ，現代の学生諸君は非常に困っている．

そして同様に教師達も困っている．なぜなら「独創性」そのものは講義できない．むろん誰かの独創的な成果を紹介することならできるが，独創性そのものを身につけたい学生にとっては，既存の成果が自らの独創でないことは明らかであり，そのような他人事を，自分自身がこれから発揮すべき独創性とどのように結びつけたらよいのか判然としないのである．勘のよい学生諸君は，既にこのあたりまでを自覚しているようだ．このような本音に直面すると，教師が講義室でできることの限界を痛切に感じる．

そこで，この現状に対する私の愚案であるが，まず独創性を直接教授するのは諦めるとして，それでいながら学生の独創性を喚起するには，講義内容を学生が自ら合理的に脱線するための思考のツール (と放っとく時間) を提供するのがよいような気がしている．具体的には理論でもよいし，ソフトでもよい，いうまでもなくハードでもよい．学生の合理的な脱線思考を支援するものなら何でもよい．その意味で，本書の構成内容に実用的と評されうる部分が万が一にもあるとすれば，それは，問題の具体的な図示法と数式表現法を挙げた部分なのかも知れない．

このような観点にたつとき，本書の限界に対する著者自身の反省もこめて，この 21 世紀初頭の日本において，学生の合理的な脱線思考を支援するツールが，果していくつ入手可能なのだろうかと思う．

(長女 9kg あっぷっきー，妻も宇宙語茶の間にて，無事擱筆)